SPRAWOZDANIE

Dyrekcyi

C. K. WYŻSZEJ SZKOŁY REALNEJ

w Stanisławowie

za rok szkolny 1910/11.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

STANISŁAWÓW.

Z drukarni i litografii St. Chowańca w Stanisławowie.

1911.

SPRAWOZDANIE

Dyrekcyi

C. K. WYŻSZEJ SZKOŁY REALNEJ

w Stanisławowie

za rok szkolny 1910/11.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

STANISŁAWÓW.
Z drukarni i litografii St. Chowańca w Stanisławowie.
1911.

TREŚĆ:

Kwestye dydaktyki matematyki w szkole realnej

napisał

Teodor Hrycak.

Jako cel nauki matematyki w szkole realnej określa nowy plan wprowadzony przez c. k. Ministerstwo Wyznań i Oświaty w r. 1909 (Normallehrplan der Realschulen vom 10. April 1909) w szkołach realnych austryackich, a przez c. k. Radę szkolną krajową we Lwowie za zezwoleniem ministeryalnem (Plan nauki dla galicyjskich szkół realnych z dnia 20. lipca 1909) w szkołach realnych galicyjskich — dokładną znajomość t. zw. elementarnej matematyki, tudzież zrozumienie i zastosowanie pojęcia funkcyi.

Dawniejszy plan*) oznaczał jako cel nauki — gruntowne poznanie i dokładne opracowanie matematyki elementarnej.

Zasadniczej zmiany nowy plan więc nie wprowadza, gdyż i dotychczasowy plan obejmował sporadyczne zajmowanie się funkcyami, n. p. przy określeniu równań, w goniometryi, w analityce, a od nauczyciela zależało, w jakim zakresie zajmował się zmiennością wielkości, rozważanych w innych działach matematyki. Nie używano chyba zbyt często słowa funkcya, jednak pojęciem zmienności jednej wielkości towarzyszącej zmienności drugiej wielkości nie można nie operować w matematyce ogólnej; wszelkie bowiem wzory określające nowe wielkości w algebrze a więc sumę, różnicę, iloczyn, iloraz, potęgę, pierwiastek, logarytm i t. d., a w geometryi wzory na długość, powierzchnię, objętość i t. d. wypowiadają zależność dotyczącej wielkości od innej.

*) Ustawa z dnia 24. sierpnia 1899 o szkołach realnych w Galicyi.

Nowy plan natomiast wyjaśnia w uwagach, jak daleko wypada się posunąć w „zrozumieniu i zastosowaniu pojęcia funkcyi“, mianowicie „wobec traktowania nadarzających się w nauce pochodnych przestrzega przed nieporozumieniem, jakoby chodziło tu o systematyczne różniczkowanie choćby tylko wszystkich funkcyi elementarnych i zaznacza, że chodzi tu o początkowe zasady różniczkowania i całkowania, które uświadamia się uczniom w formie zastosowań do znanego materyału nauki celem pogłębienia tegoż, lecz bez obciążenia uczniów, owszem z uproszczeniem wymagań dotychczasowych“.

I n t e n c y ą n o w y c h p l a n ó w jest dążenie do:

1. Uwzględnienia każdoczesnego rozwoju umysłowego uczniów.

2. Uproszczenia toku nauczania przez ś c i ś l e j s z e z e s p o l e n i e wiadomości wiążących ze sobą wewnętrznie, i to na wszystkich stopniach, a r y t m e t y k ę i g e o m e t r y ę.

3. Wszechstronnego dostosowania materyału naukowego do innych odpowiednich przedmiotów nauki i do życia praktycznego.

4. Osiągnięcia z r o z u m i e n i a z a l e ż n o ś c i f u n k c y j n e j przy każdej sposobności dochodzącego pod koniec studyów do oznaczenia wielkości przyrostu funkcyi przy pomocy pochodnej.

5. Kształcenia wyobraźni przestrzennej przez wykonywanie przez uczniów rysunków, modeli i pomiarów.

6. Usunięcia materyału przestarzałego lub uznanego za jałowy pod względem dydaktycznym, a temsamem uproszczenia i ułatwienia nauki mimo wprowadzonych nowości.

Kwestyę praktycznego przeprowadzenia nowych planów starają się rozwiązać nowe podręczniki, a obok nich książki dydaktyczne i rozprawy dydaktyczne w sprawozdaniach szkolnych.

Na razie jednak kwestya ta nie jest ustalona po części z powodu braku wszystkich podręczników ułożonych podług nowych planów, dalej dlatego, że i nowe podręczniki z natury rzeczy są próbami przeprowadzenia reformy nauki, wreszcie z tego powodu, że książki dydaktyczne i rozprawy dydaktyczne nie mogą traktować kwestyi reformy wyczerpująco, lecz ogólnie i nie wytyczają stałej granicy dla teoryi funkcyi w szkole realnej.

Nie da się atoli zaprzeczyć, że wspomniana intencya nowych planów nie da się przeciwstawić intencyi dawnych planów, gdyż intencya ta, pominąwszy niektóre momenty n. p. zespo-

lenie na każdym stopniu arytmetyki i geometryi i rozważanie przy każdej sposobności zależności funkcyjnej, jest postulatem każdej zdrowej dydaktyki w ogóle, a dydaktyki matematyki w szczególności.

A że zespolenie arytmetyki i geometryi należy rozumieć przeważnie jako uzmysłowienie sposobem geometrycznym często abstrakcyjnych twierdzeń arytmetycznych, a dalej rozważania funkcyjne przy każdej sposobności nie są zmianą dotychczasowej nauki tyle pod względem treści, ile pod względem zmienionej formy, wreszcie ponieważ o systematyczny wykład zasad rachunku różniczkowego i całkowego w nowych planach nie chodzi, zatem i dotychczasowe podręczniki mogą służyć za podstawę nauczania podług zreformowanego planu, jeżeli tylko nauczyciel ciągle będzie miał w pamięci intencye tegoż planu i do twierdzeń matematycznych, których dokładne poznanie musi i nadal pozostać podstawą nauczania, dołączy wszędzie, gdzie tylko się da, rozważania funkcyjne z uzmysłowieniem geometrycznem i stosowne przykłady z życia praktycznego i innych działów nauki, zwłaszcza fizyki, wreszcie na najwyższym stopniu zapozna uczniów z ogólnem pojęciem funkcyi.

Wobec przewrotu, jakiego spodziewano się po wprowadzeniu nowych planów, autor niniejszej rozprawki usiłuje wykazać, obok zalet wprowadzenia pojęcia funkcyi i stosowania do rozwiązywania różnych zagadnień matematycznych metod geometrycznych, także trudności połączone ze zrozumieniem funkcyi i istotne znaczenie metod geometrycznych.

I.

Pojęcie funkcyi i jej ciągłość.

1. Rodzaje zależności.

Pojęcie funkcyi nie wytworzy się należycie w umyśle przez określenie, lecz przez abstrakcyę z przykładów konkretnych, w których jedna wielkość występuje jako zależna od wartości drugiej wielkości.

N. p. Za pomocą obserwacyi swobodnego spadania ciał zbadać możemy drogę odbytą przez ciało w 1, 2, 3,... sekundach i dochodzimy do przybliżonego wyniku $s_1 = 5.1^2 m$, $s_2 = 5.2^2 m$, $s_3 = 5.3^2 m$ i t. d.

Taksamo badać możemy drogi odbyte w $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cdots$ sek. i znów dochodzimy do wyniku

$$s_{\frac{1}{2}} = 5.(\tfrac{1}{2})^2,\ s_{\frac{3}{2}} = 5.(\tfrac{3}{2})^2, \cdots\ s_{\frac{1}{3}} = 5.(\tfrac{1}{3})^2,\ s_{\frac{2}{3}} = 5.(\tfrac{2}{3})^2, \cdots \text{m.}$$

Badanie w dowolnych czasach wynoszących całkowitą lub ułamkową część sekundy jest niemożliwe, ale chcąc stwierdzić prawidłowość zauważoną w tych obserwacyach użyjemy krótkiego przedstawienia $s_t = 5.t^2$, gdzie przez t będziemy rozumieli ilość sekund, przez s_t zaś drogę w tym czasie przebytą.

Temsamem przyjmujemy niestwierdzoną przez obserwacyę prawidłowość w dowolnych czasach, albo t. zw. prawo fizyczne, w którego prawdziwość wierzymy tak długo, dopóki obserwacye nowe nie skłonią nas do uzupełnienia lub zmiany tego prawa.

Takie prawa w każdej dziedzinie nauki, zwłaszcza w naukach przyrodniczych są wyrazem naszego poglądu na zależność czynników wchodzących w skład najrozmaitszych zjawisk.

Pamiętać jednak trzeba o tem, że między stwierdzeniem zależności w poszczególnych wypadkach a prawem odnoszącem się do wszystkich wypadków jest olbrzymi skok, usprawiedli-

wiony konieczną chęcią umysłu do krótkiego ujęcia wyników otrzymanych w dostatecznie dużej ilości wypadków.

Geometrycznie rzecz biorąc, a więc odcinając na linii prostej od pewnego punktu 0 odcinki proporcyonalne do czasów, a w końcach tychże odcinków kreśląc odcinki prostopadłe do danej prostej, a proporcyonalne do dróg odpowiednich, otrzymujemy w punktach końcowych odcinków szereg punktów, które możemy tak licznie wyznaczyć, że przedstawią nam szereg, bardzo mało różniący się od linii ciągłej. Ten szereg będzie nas pouczał o zmienności drogi, towarzyszącej zmianom czasu. Przejście od spostrzeżeń poszczególnych do prawa jest w obrazie geometrycznym przejściem od szeregu punktów do możliwie prostej linii ciągłej, łączącej te punkty.

W ten sposób naszkicowaliśmy 3 sposoby przedstawiania zależności 2 wielkości, mianowicie: tabelaryczny, geometryczny i algebraiczny.

W bardzo wielu wypadkach przejście od sposobu tabelarycznego do sposobu algebraicznego jest bardzo trudne, tak, że zadowolić się musimy przedstawieniem tabelarycznem i geometrycznem.

N. p. Badając temperaturę wrzenia cieczy (wody) spostrzegamy, że w tych samych zresztą warunkach temperatura podwyższa się przy zwiększonem, a obniża się przy zmniejszonem ciśnieniu; mianowicie temperatury 60, 80, 100, 120, 140°C odpowiadają ciśnieniom 149, 355, 760, 1490, 2720 (w mm rtęci)*). Z takich liczb wysnuć prawo matematyczne nadzwyczaj trudno; dla krótkiego ujęcia tego związku zadowalamy się ogólnem stwierdzeniem wzrostu temperatury ze wzrostem ciśnienia i uwagą, że wzrost ciśnienia nie jest równomierny, lecz coraz to szybszy.

Przedstawienie graficzne również rzeczy nie ułatwia; mając bowiem w tem przedstawieniu jedną parę wartości n. p. 100°C i 760 mm i wzmiankę o wzroście ciśnienia z przebiegu szeregu punktów nie zdołamy sobie wyobrazić zależności obu wielkości.

Obserwacye własne możemy zastąpić przyrządami, zapisującymi każdoczesną wartość obu wielkości, n. p. temperaturę możemy zapisywać termografem, a ciśnienie barografem, a następnie z zapisanych diagramów wykreślić dostatecznie dokładny obraz zależności obu wielkości. Ostatecznie jednak i w tym wy-

---

*) Kohlrausch, Praktische Physik 1901.

padku należy, celem krótkiego ujęcia tej zależności, wysnuć z mechanicznego obrazu geometrycznego prawo matematyczne.

Przy tem wszystkiem przyjmujemy jako rzecz pewną, że droga przy spadaniu zmienia się w sposób ciągły ze zmianą czasu, a temperatura wrzenia w sposób ciągły ze zmianą ciśnienia, to znaczy, że zmiana drogi odpowiadająca dostatecznie małej zmianie czasu, a tak samo zmiana temperatury wrzenia, odpowiadająca dostatecznie małej zmianie ciśnienia, jest dowolnie małą.

Badanie zależności takich jak wymienione, to jest zależności doświadczalnych albo empirycznych, przedstawia tę korzyść, że przez analogię możemy stawiać dowolne zależności rozmaitych wielkości, a zawsze mamy pewne wyobrażenie tych zależności w świecie nas otaczającym.

A więc możemy przyjąć zależności między drogą a czasem

$$s = at,\ s = at^2,\ s = at^3, \cdots,\ \text{albo}\ s = \frac{a}{t},\ \frac{a}{t^2}, \cdots s = a \sin t, \cdots\cdots$$

Dalej możemy jako geometryczny obraz zależności przyjąć dowolną prawidłową linię ciągłą, a zawsze wyobrażamy sobie tę zależność w świecie materyalnym.

Drugą drogą, prowadzącą do poznania zależności 2 wielkości są rozważania geometryczne, w których jednak brak pierwiastka czasowego. Jeżeli tedy rozważamy obwód lub powierzchnię kwadratu równocześnie z długością boku, albo powierzchnię lub objętość sześcianu równocześnie z długością krawędzi, dochodzimy prostem rozumowaniem do wyniku, że obwody kwadratów o bokach 1, 2, 3,... cm wynoszą 4.1, 4.2, 4.3... cm, że powierzchnie (liczby wymiarowe) w tychże wypadkach wynoszą 1^2, 2^2, 3^2... cm^2, a tak samo powierzchnie, względnie objętości sześcianów o krawędziach 1, 2, 3.. cm wynoszą 6.1^2, 6.2^2, 6.3^2.. cm^2, względnie 1^3, 2^3, 3^3.. cm^3.

Przez abstrakcyę posuwamy się i tu do ogólnych praw: $u_a = 4a$, $p_a = a^2$, $P_a = 6a^2$, $V_a = a^3$, gdzie znaczenie poszczególnych znaków wynika z poprzednich rozważań. Że ważność tych wzorów jest tu ogólna dla dowolnie dużych wartości całkowitych na a, a tak samo dla wartości ułamkowych i niewymiernych, pouczają nas odpowiednie rozważania geometryczne. Są to więc bezwzględnie ważne wzory, czy też twierdzenia geometryczne.

Różnica między temi prawami a prawami empirycznemi jest zasadnicza. W prawie fizycznem wielkości zmienne odnoszą się do jednego indywiduum obserwowanego w przeciągu czasu, a więc różne temperatury wrzenia i ciśnienia obserwujemy na jednym i tym samym przyrządzie; w twierdzeniu geometrycznem wielkości zmienne odnoszą się do nieskończonej ilości indywiduów tego samego rodzaju, czy to kwadratów, czy też sześcianów, wyobrażanych równocześnie. O tyle trudniejszem jest dla umysłu uchwycenie zależności wielkości, wchodzących w skład prawa geometrycznego.

Pojmowanie tej zależności możemy ułatwić w wysokim stopniu, gdy te zmienne wielkości przedstawimy jako wielkości jednego i tego samego indywiduum w rozmaitych czasach, a więc kwadrat rosnący lub malejący pod wpływem jakiegoś czynnika, n. p. kwadrat materyalny jednostajny, zmieniający się pod wpływem temperatury. Przez to twierdzenie samo nie doznaje żadnego uszczerbku, a zrozumienie staje się łatwiejsze.

Trzecią dziedziną wreszcie, w której dochodzimy do pojęcia zależności 2 wielkości, jest arytmetyka. Tu wprost rozważamy 2 szeregi liczb, z których jeden powstaje z drugiego na podstawie pewnego, dowolnie obranego określenia n. p. takiego, że z dowolnej liczby pierwszego szeregu powstaje odpowiednia liczba drugiego szeregu wskutek pomnożenia przez pewną stałą liczbę. Dowodu, że ta zależność istnieje dla liczb ułamkowych lub niewymiernych, małych lub dużych nie potrzeba, gdyż fakt ten stwierdzamy w określeniu obu szeregów.

Tu więc nie spostrzegamy, ani też nie dowodzimy zależności dwu wielkości, ale sami tę zależność przyjmujemy. Powyższą zależność wyrażamy wzorem: $y = 2x$, i analogicznie w innych wypadkach.

Jest to abstrakcya już bardzo daleko posunięta; przy rozpatrywaniu bowiem zależności arytmetycznej pomijamy zupełnie powód tej zależności, podczas gdy w zjawiskach fizycznych przyjęcie takiego powodu jest koniecznym wynikiem dążenia do zrozumienia zjawiska, a w geometryi leży powód zależności w naturze utworu geometrycznego.

W takiej zależności arytmetycznej jeszcze bardziej potrzebujemy uzmysłowienia dla należytego zrozumienia zależności obu szeregów (ciągów).

Pierwszym krokiem jest użycie metody geometrycznej. Możemy n. p. w powyższym wypadku wziąć pod uwagę wszystkie trójkąty prostokątne, w których stosunek obu przyprostokątni wynosi 2, a więc trójkąty prostokątne o pewnym kącie α, którego $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Jeszcze lepiej uprzytomnimy sobie tę zależność, kiedy pomyślimy, że trójkąt prostokątny z jednostajnego materyału o kącie α, którego $\operatorname{tg} \alpha = 2$, zmienia jednostajnie boki pod wpływem ogrzania, albo jeżeli wyobrazimy sobie ruch prostolinijny punktu, którego droga w pewnym czasie jest w każdej chwili 2 razy większą od ilości jednostek czasu. To ostatnie pojmowanie jest t. zw. genetycznem pojmowaniem zależności.

2. Pojęcie funkcyi.

Za pomocą tych rozważań dochodzimy do pojęcia funkcyjnej zależności 2 wielkości. Praktycznie rzecz biorąc, jedna z wielkości występujących w pewnem zjawisku jest dowolnie zmienną, zmiany zaś drugiej zależą od zmian pierwszej; nazywamy więc drugą zależną od pierwszej, albo funkcyą pierwszej. N. p. długość pręta nazywamy funkcyą temperatury. Dla traktowania matematycznego zależności jest wewnętrzna przyczyna tej zależności rzeczą obojętną, a rzeczą główną jest wzór matematyczny, wyrażający każdoczesną wartość długości za pomocą równoczesnej wartości temperatury; jeżeli taki wzór, albo w ogóle prawo istnieje, mówimy o funkcyjnej zależności; ponieważ ten sam wzór, względnie prawo określa każdoczesną wartość temperatury przy pomocy równoczesnej wartości długości, pojmujemy w matematyce również wartość temperatury jako funkcyę długości pręta, a zatem zależność funkcyjna 2 wielkości jest rzeczą wzajemną.

Jeszcze wyraźniej występuje ta wzajemna zależność funkcyjna dwu wielkości w zagadnieniach geometrycznych i arytmetycznych. Ten sam wzór, który określa powierzchnię kwadratu, jako funkcyę boku, określa równocześnie bok jako funkcyę powierzchni; tak samo wzór: $y = 2x$, który określa każdą wartość y jako funkcyę x, określa przez to samo x, jako funkcyę y.

Wzór więc, względnie prawo matematyczne lub geometryczne określa wzajemną zależność 2 wielkości wchodzących w skład tego wzoru.

Co do rodzajów tej zależności, a więc rodzajów funkcyjnego związku dwu wielkości, to przedewszystkiem jedne funkcye będą określone przy pomocy działań arytmetycznych lub algebraicznych, jakie trzeba wykonać na jednej wielkości, chcąc otrzymać równoczesną wartość drugiej; drugie zaś będą określone prawem geometrycznem określającem wzajemny związek 2 wielkości; do ostatnich należą n. p. związek między obwodem koła a promieniem, związek między łukiem koła a cięciwą i inne podobne znane pod nazwą funkcyi goniometrycznych.

Przy rozważaniu funkcyi algebraicznych będzie dążeniem zawsze znaleźć prawo utworu geometrycznego wyobrażającego tę zależność, względnie uzmysłowić sobie tę zależność genetyczną metodą, t. j. przy pomocy zmian zachodzących na jednem indywiduum, przy rozważaniach funkcyi określonych prawem geometrycznem oprócz stosowania metody genetycznej będziemy dążyli do wyprowadzenia wzoru matematycznego, określającego tę samą zależność przy pomocy działań.

Co więcej, prawa empiryczne skłonią nas do jeszcze trudniejszych badań geometrycznych i algebraicznych, a z drugiej strony nabiorą dostatecznej jasności dopiero przez poznanie natury matematycznej tych praw, tak samo rozwiązanie rozmaitych zagadnień fizycznych będzie możliwe po należytem zrozumieniu matematycznego związku dotyczących wielkości.

3. Ciągłość funkcyi.

Bardzo ważnem pojęciem przy każdej funkcyi jest pojęcie ciągłości, t. j. ciągły, stopniowy wzrost lub zmniejszanie się każdej z wielkości zależnych. Przy funkcyach empirycznych jest taka ciągłość rzeczą naturalną, gdyż wielkość fizyczną wyobrażamy sobie jako zmienną w sposób ciągły n. p. drogę punktu jako wielkość, zmieniającą się z biegiem czasu w sposób ciągły, objętość ciała jako wielkość stopniowo (ciągle) się zmieniającą z podwyższaniem lub obniżaniem temperatury.

Pojęcie ciągłości nie jest tak wprost zrozumiałe przy funkcyach matematycznych.

Jeżeli weźmiemy n. p. wzór: $y = x^2$, to ciągłość jest wprost widoczna, jeżeli wyobrazimy sobie x jako bok kwadratu, y jako jego powierzchnię; dla ujemnych x jest ciągłość tem samem dowiedziona. Jakież będzie matematyczne wyrażenie ciągłości?

Ciągłość jednej wielkości przyjmujemy z góry wyobrażając ją sobie n. p. jako drogę punktu, poruszającego się w jednym kierunku po prostej.

Ciągłość drugiej stwierdzimy, jeżeli jej zmiana da się dowolnie zmniejszyć przez dostateczne zmniejszenie zmiany wielkości pierwszej (uważanej za niezależną). Tem samem stwierdzamy, że wielkość zależna (funkcya) również da się wyobrazić jako droga innego punktu, poruszającego się po prostej; gdyby było inaczej, a więc gdyby droga, wyobrażająca funkcyę, była w jednem lub kilku miejscach przerwana, to przerwa wynosiłaby pewną skończoną ilość, a więc zmiana funkcyi nie dałaby się zmniejszyć poniżej tej przerwy. W naszym wypadku więc posuńmy się od wartości x do dostatecznie mało różniącej się od niej wartości x', to wartość y zmieni się równocześnie na y'. Żądanie, żeby zmiana y' — y, dała się zmniejszyć poniżej dowolnie małej wartości η, a więc $y' - y < \eta$, da się spełnić przy dostatecznie małej zmianie x' — x; albowiem:

$$y = x^2,\ y' = x'^2,\ y' - y = x'^2 - x^2.$$

A zatem warunek $y' - y < \eta$ spełni się, gdy

$$x'^2 - x^2 < \eta$$
$$x'^2 < x^2 + \eta$$
$$x' < \sqrt{x^2 + \eta}$$
$$x' - x < \sqrt{x^2 + \eta} - x;$$

przy x i x' bierzemy znak +, a $x' > x$.

Ważnym momentem w nauce jest pokazanie funkcyi nieciągłych. Przykładem takiej funkcyi jest: $y = \frac{1}{x}$, to znaczy każdej liczbie jednego ciągu odpowiada w drugim ciągu odwrotność tej liczby. Gdy więc rozważanie rozciągniemy na liczby dodatnie i ujemne, to tabelarycznie przedstawia się zmienność obu wielkości x i y następującym schematem:

x	y
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{3}$	3
. . .	. . .
— 1	— 1
— $\frac{1}{2}$	— 2
— $\frac{1}{3}$	— 3
. . .	. . .

Porównując ze sobą wartości y odpowiadające równym co do wartości bezwzględnej, a przeciwnym co do znaku wartościom x, otrzymujemy następujące różnice:

$x' - x$	$y' - y$
$1 - (-1) = 2$	$1 - (-1) = 2$
$\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$	$2 - (-2) = 4$
$\frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$	$3 - (-3) = 6$
. . . . .	. . . . . .

Zatem malejącej dostatecznie zmianie x odpowiada rosnąca bez granicy zmiana y. Z natury rzeczy wynika, że przez zmniejszanie zmiany x zmiana y nie da się dowolnie zmniejszyć, gdy więc x w przedziale obejmującym x = o zmienia się w sposób ciągły, y zmienia się w sposób nieciągły.

W geometrycznem przedstawieniu*) krzywa wyobrażająca tę zależność ma w punkcie x = o przerwę i to przerwę wykraczającą po za wszelką dowolnie dużą liczbę.

Podobnie ma się rzecz z funkcyą: y = tg x, gdzie x przedstawia łuk koła o promieniu r = 1, a y przynależną do łuku wartość stycznej goniometrycznej.

Funkcyi y = [x], gdzie y ma dla pewnego x wartość liczby całkowitej zawartej w x, nie jest wskazanem przytaczać**), gdyż jest to funkcya zanadto sztuczna.

Tak samo niezbyt stosowną rzeczą byłoby określać ciągłość y w pewnym przedziale x' — x w ten sposób, że ciąg wartości y począwszy od y' a odpowiadający zbliżaniu się wartości x' do wartości x dąży do pewnej granicy, równej wartości, którą funkcya y przyjmuje dla x, choć to określenie nakrywa się właściwie z poprzedniem.

---

*) Patrz figura 1. tablic.

**) Por. Hoborski i Wilk, Zasadnicze pojęcia rachunku różniczkowego całkowego, Kraków 1910.

II.

Granica, pochodna, różniczka.

1. Uwagi ogólne.

Może zasadniczą nowością w nowym planie nauki matematyki jest pojęcie pochodnej pewnej funkcyi. W dawniejszej nauce spotykaliśmy się z zagadnieniem dotyczącem pochodnej głównie w dwu wypadkach*): we fizyce przy określeniu prędkości w pewnym punkcie przy ruchu prostolinijnym zmiennym, w geometryi analitycznej przy wyznaczaniu współczynnika kierunkowego stycznej do krzywej, wyrażonej wzorem zawierającym 2 wielkości zmienne, t. zw. równaniem krzywej.

Mianowicie podczas gdy przy ruchu jednostajnym punktu, określonym wzorem $s = ct$ (gdzie s przedstawia drogę, t czas, a c pewną stałą, dowolną zresztą liczbę), wypada stosunek zmiany drogi $s' - s$ do zmiany czasu $t' - t$ jako stały: $\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{ct' - ct}{t' - t} = c$, nawet dla możliwie najdrobniejszych zmian czasu i jako taki służy jako cecha charakterystyczna tego ruchu pod nazwą prędkości, to już przy ruchu określonym prawem: $s = at^2$, stosunek ten: $\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{at'^2 - at}{t' - t} = a(t + t')$, zmienia się w miarę tego, jak wartość t' zbliża się do wartości t; nie określa zatem prędkości w odstępie czasu $t' - t$, gdyż zmienia się, gdy zważymy jego wartość w pierwszej i drugiej połowie tego odstępu. Jeżeli $t' - t = \Delta t$, to $t' = t + \Delta t$, $v = \frac{s' - s}{t' - t} = a(2t + \Delta t)$, a zatem wartości tego stosunku v_1 i v_2

*) Höfler, Didaktik des mathem. Unterrichtes 1910.

w pierwszej i drugiej połowie odstępu Δt są:

$$\upsilon_1 = a\left(2t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$\upsilon_2 = a\left[2\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2}\right] = a\left(2t + \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

Połowiąc tak odstęp Δt coraz dalej, dochodzimy do coraz innych wartości na υ; to rozumowanie kończyło się dawniej we fizyce wnioskiem, że gdy odstęp czasu dowolnie zmniejszymy, zmniejszy się dowolnie i zmiana drogi, a stosunek tych dowolnie małych wielkości przedstawi nam prędkość w danej chwili, t. j. chwili, po której ten odstęp czasu następuje. Prędkość więc υ w pewnej chwili t przedstawiano wzorem: $\upsilon = \frac{\sigma}{\tau}$, gdzie τ oznaczało dowolnie małą zmianę czasu, a σ dowolnie małą zmianę drogi. Tak n. p. pisze Tomaszewski i Kawecki w „Fizyce dla wyższych klas szkół średnich 1904“: „Im mniejszy jest czas, tem bardziej zbliża się iloraz drogi przez czas do rzeczywistej prędkości w danej chwili, bo w ciągu bardzo małej chwili można ruch zmienny uważać za jednostajny“. O pochodnej wzmianki niema.

Niektóre podręczniki*) wyprowadzały w wypadku $s = at^2$ $\upsilon = \frac{s' - s}{t' - t} = a(2t + \Delta t)$, a więc gdy $\Delta t = 0$, to znaczy, gdy odstęp czasu zmaleje do zera, $\upsilon = 2\,at$.

Podobnie określały podręczniki fizyki przyspieszenie, wychodząc z wypadku: $\upsilon = bt$. Wtedy mianowicie stosunek przyrostu prędkości do przyrostu czasu wynosi: $\frac{\upsilon' - \upsilon}{t' - t} = \frac{bt' - bt}{t' - t} = b$, a więc jest stały dla dowolnie małych przyrostów czasu i jest znowu cechą charakterystyczną tego ruchu, nazywa się też przyspieszeniem tego ruchu.

Ale gdy $s = at^3$, to $\upsilon = 3at^2$, wtedy stosunek: $\frac{\upsilon' - \upsilon}{t' - t} = 3a(t + t')$, zatem nie jest wielkością stałą, lecz zmienną i nosi nazwę przyspieszenia średniego, które ostatecznie daje nam przyspieszenie rzeczywiste w pewnym punkcie, gdy odstęp czasu $t' - t = \Delta t$ zmaleje do 0.

---

*) Höfler, Naturlehre f. die Oberstufe 1903.

Co do kwestyi stycznych, to podręcznik geometryi*) wyraża się tak: „Styczną do linii krzywej można uważać za jej sieczną, która wskutek obrotu około jednego punktu przecięcia zajęła takie położenie, że drugi punkt przecięcia się z krzywą padł na pierwszy“. W myśl tego określenia wyprowadza n. p. równanie stycznej do elipsy, której równanie jest: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, w sposób następujący:

Obok punktu M' o współrzędnych (x', y'), w którym należy poprowadzić styczną, obiera drugi punkt M'' o współrzędnych (x'', y''). Równanie siecznej**) SS' przechodzącej przez punkty M' i M'' jest: $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$.

Ponieważ punkty M' i M'' leżą na elipsie, przeto ich współrzędne czynią zadość równaniu elipsy,

$$\text{zatem} \quad b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$$
$$\text{i} \quad b^2x''^2 + a^2y'' = a^2b^2;$$

odjąwszy pierwszą równość od drugiej otrzymamy:

$$b^2(x''^2 - x'^2) + a^2(y''^2 - y'^2) = 0, \quad \text{czyli}$$
$$b^2(x'' + x')(x'' - x') + a^2(y'' + y')(y'' - y') = 0, \quad \text{a stąd}$$
$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}.$$

Podstawiwszy tę wartość w równaniu siecznej SS' znajdziemy:

$$y - y' = - \frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x').$$

Jeżeli punkt M'' padnie na M', w takim razie sieczna SS' zajmie położenie stycznej TT'; założywszy więc w równaniu siecznej $x'' = x'$, $y'' = y'$, otrzymamy równanie stycznej TT':

$y - y' = - \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$, któremu można nadać także kształt: $b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2$, wykazujący wielkie podobieństwo do równania elipsy.

Te dwa zagadnienia dały prawie równocześnie Newtonowi i Leibnitzowi***) popęd do wynalezienia rachunku różniczkowego, który Newton nazwał „methodus fluxionum (metodą prędkości)“, Leibnitz zaś „methodus tangentum (metodą stycznych)“.

---

*) Mocnik-Maryniak, Geometrya dla klas wyższych 1906.

**) Patrz figura 2 tablic.

***) Fink, Geschichte der Elementarmathematik 1890.

Ciekawą rzeczą w przytoczonem pojmowaniu tych zagadnień jest to, że od 2 chwil, względnie 2 punktów przeskakuje się odrazu do jednej chwili, względnie punktu przez postawienie $t' = t$, lub $x'' = x'$, $y'' = y'$ i że wyrażenie $\frac{s' - s}{t' - t}$, $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$, które wskutek takiego podstawienia staje się $\frac{0}{0}$, przedstawia się jako wyrażenie oznaczone, a więc $\frac{s' - s}{t' - t}$ dla $t' = t$ równe n. p. $2at$, podobnie $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ dla $x'' = x'$, $y'' = y'$ równe: $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$.

To zauważyć można w zagadnieniu stycznej w przytoczonym przykładzie, tosamo znajdujemy w zagadnieniu prędkości w podręcznikach fizycznych*), a nawet w najnowszych rozprawkach ta sprawa nie jest dostatecznie wyjaśniona. Że zaś ten skok od 2 oddzielnych chwil lub punktów do jednej chwili względnie punktu potrzebuje wyjaśnienia, tego dowodzi najlepiej zmiana w pojmowaniu tej sprawy, jaka zaszła u Höflera od czasu wydania: „Hilfsbuch zur Physik“ do czasu wydania: „Didaktik des mathematischen Unterrichtes 1910“. Mówiąc w ostatniem dziele o stycznej do krzywej jako prostej przystosowującej się w danym punkcie do krzywej, zadaje sobie pytanie, w jaki sposób powstaje ze siecznej styczna. Odpowiedź na to: „w ten sposób, że punkt drugi krzywej M', wyznaczający sieczną, przesuwa się coraz bliżej do punku M, w którym styczną należy poprowadzić“. Na pytanie jednak, czy M' przesuwa się do M aż do zupełnego nakrycia, czy nie, podaje następującą alternatywę: „Jak długo M' z M nie zeszło się „zupełnie“, dopóty sieczna nie jest jeszcze styczną; gdy jednak M' rzeczywiście znalazło się w M, niema 2 punktów, które są niezbędne do wyznaczenia kierunku pewnej prostej; wtedy przez punkt M i M' można poprowadzić dowolnie wiele prostych, które wszystkie mogą być pomyślane jako powstałe ze siecznej, gdyby tu tylko o to chodziło, że z 2 punktów M' i M ma powstać tylko jeden punkt M, a nie także o to, jak (mianowicie przez ciągłe prowadzenie wzdłuż łuku krzywej $M'M$) punkt sąsiedni M' dochodzi do punktu M. Podobnie ma się rzecz z określeniem prędkości w pewnej chwili.

---

*) Höfler, Hilfsbuch zur Physik 1904.

To rozumowanie zgadza się z rozumowaniem arytmetycznem.

Wyrażenie $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$, określające kierunek siecznej traci z chwilą zjednoczenia obu punktów M i M' swą wartość określoną, a przybiera wartość nieokreśloną $\frac{0}{0}$, a tylko w jakiś tajemniczy sposób omijamy tę nieokreśloność na podstawie równości

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = - \frac{b^2 (x'' + x')}{a^2 (y'' + y')}$$

Skok ten w rozumowaniu polega na tem, że my wzór ważny, jak długo M i M' są różne, stosujemy i wtedy, gdy M i M' spadną na siebie.

Kwestyę tego przejścia rozwiązuje Newton przy pomocy pojęcia granicy, Leibnitz przez użycie pojęcia różniczki. Ponieważ obecnie*) na czasie jest dyskusya na temat, jak określać styczną a tem samem i pochodną, czy metodą granicy, czy metodą różniczek, a w szczególności w praktycznem przeprowadzeniu tej kwestyi panuje na razie wielka niejednostajność, chciałbym tu na kilka momentów zwrócić uwagę a tem samem przyczynić się do wyświetlenia tej kwestyi. Jest to w każdym razie dla wykształcenia ogólnego o wiele ważniejsza kwestya, aniżeli formalistyczne szukanie pochodnych w poszczególnych wypadkach albo nawet praktyczne stosowanie wzorów otrzymanych w geometryi lub fizyce.

2. Pojęcie granicy.

Pojęcie granicy nie jest w podręcznikach szkolnych, nawet najnowszych, należycie uwydatnione. Tak n. p. pisze Dziwiński**): „Analogicznie do metody granic styczna w danym punkcie P jest sieczną, przechodzącą przez punkt P krzywej w tem szczególnem położeniu, wywołanem jej obrotem około punktu P, że jej drugi punkt przecięcia Q wpada w punkt P“. W innem zaś miejscu***): „Metoda granic polega na wyznaczaniu stosunku przyrostu Δy funkcyi $y = f(x)$ do przyrostu Δx zmiennej nieza-

---

*) Specyalna dyskusya w tej sprawie toczyła się na ankiecie matematyków, zwołanej przez Radę szkolną kraj. w lutym 1911.

**) Podręcznik arytmetyki i algebry 1910 str. 187.

***) detto str. 186.

leżnej x. Na podstawie tej metody obliczamy najpierw stosunek różnicowy

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ i wyznaczamy granicę $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, do której ten stosunek dąży, gdy przyrost Δx, malejąc, staje się zerem". Praktyczne postępowanie wedle tego określenia polega na tem, że gdy n. p.

$$y = x^3,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2;$$

przez wstawienie $\Delta x = 0$ otrzymuje się granicę

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2.$$

W takiem pojmowaniu rzeczy jest postęp tylko pod względem formalistycznym leżący w tem, że używa się znaku „lim", dalej znaku $\frac{dy}{dx}$ w zestawieniu ze znakiem „$\frac{\Delta y}{\Delta x}$", w istocie rzeczy jednak to pojmowanie nie różni się n. p. od przytoczonego wyżej sposobu pojmowania Mocnika z r. 1906 lub Höflera z r. 1904.

Do należytego zrozumienia pojęcia granicy koniecznem jest wprowadzenie nieskończonego szeregu, a raczej ciągu liczb określonego pewnem prawem wzajemnego następstwa. Takim ciągiem nieskończonym jest naturalny szereg liczb 1, 2, 3, 4, . . . n. Wyrazy tego szeregu przekraczają dowolnie dużą obraną granicę, mówimy przeto, że ten ciąg nie ma granicy, albo że ma jako granicę nieskończoność, co także znaczymy symbolicznie: $\lim n = \infty$.

Drugim takim ciągiem jest ciąg jednostek ułamkowych $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}$. Liczby tego ciągu maleją w miarę rosnącego n, a dostatecznie dalekie wyrazy stają się mniejsze od dowolnie małej części jednostki; że tak jest, wynika stąd, że gdyby $\frac{1}{n}$ dla dowolnie dużego n całkowitego było ciągle większe od pewnej skończonej, choć małej, wielkości, to doszlibyśmy do wniosku, że n - krotność skończonej wielkości dla dowolnie dużego n nie przekraczałaby liczby 1, co sprzeciwia się naszemu poglądowi i pewnikowi, że przez pomnażanie pewnej skończonej wielkości dochodzimy do wielkości dowolnie dużych. Ciąg więc ułamków $\frac{1}{n}$ zbliża się do granicy 0 absolutnego w tem

znaczeniu, że różnica ułamka $\frac{1}{n}$ i 0 dla dostatecznie dużego n będzie mniejszą od dowolnie małej części jednostki, jednak ułamek $\frac{1}{n}$ nigdy sam nie stanie się równym zeru.

Wyrażamy to symbolem: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, przyczem $n \to \infty$ ma oznaczać, że n dąży do nieskończoności.

Piszemy także $\frac{1}{\infty} = 0$; nie znaczy to jednak, że dzielimy 1 przez gotową nieskończoność, gdyż dzielenia tego rozumieć nie możemy, tylko

$$\frac{1}{\infty} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dalszym takim ciągiem jest ciąg potęg całkowitych ułamka właściwego:

$$\frac{a}{b}, \left(\frac{a}{b}\right)^2, \left(\frac{a}{b}\right)^3, \left(\frac{a}{b}\right)^4, \ldots \left(\frac{a}{b}\right)^n; a < b.$$

Każdy następny ułamek tego ciągu jest mniejszy od poprzedniego. N. p.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}, \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{9}{16}, \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{27}{64}, \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{81}{256}, \ldots$$

Pytanie, do jakiej granicy dąży ten ciąg liczb.

Otóż weźmy ułamek $\frac{a}{a+1}$, w którym licznik od mianownika różni się tylko o 1.

$$\left(\frac{a}{a+1}\right)^n = \frac{a^n}{(a+1)^n} = \frac{a^n}{a^n\left(1+\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n}$$

Na podstawie wzoru potęgowego Newtona otrzymujemy:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{a} + \binom{n}{2}\frac{1}{a^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{a^3} + \ldots .$$

$$+\binom{n}{n-1}\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^n} = 1 + \frac{n}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^n}.$$

Gdy więc a jest skończoną liczbą całkowitą, to już suma pierwszych 2 wyrazów tego rozwinięcia przy dostatecznie dużem n przekroczy dowolnie dużą granicę, a więc tem samem i $\left(1+\frac{1}{a}\right)^n$.

Zatem $\left(\frac{a}{a+1}\right)^n$ da się przez obiór dostatecznie dużego n uczyn

równem $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{N}$, gdzie N jest dowolnie duże, innemi słowami $\left(\frac{a}{a+1}\right)^n$ dąży do granicy 0, gdy n dąży do nieskończoności:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n = 0.$$

To samo odnosi się do granicy dowolnego ułamka właściwego. Ten fakt stwierdzamy także symbolem

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\infty = 0,\ a < b.$$

Podobnie $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+1}{a}\right)^n = \left(\frac{a+1}{a}\right)^\infty = \infty$

i ogólnie $\left(\frac{a}{b}\right)^\infty = \infty,\ a > b.$

Z kwestyą tych 2 ciągów łączy się kwestya zbieżności, względnie rozbieżności szeregów geometrycznych. Mianowicie suma S_n pierwszych n wyrazów szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1, a o ilorazie q, wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę ciąg $S_1, S_2, S_3, S_4 \cdots S_n$, to wyrazy jego rosną, względnie maleją zależnie od tego, czy q jest ułamkiem niewłaściwym, czy też właściwym. W szczególności w ostatnim wypadku różnicę między S_n a wyrażeniem

$S = -\frac{a_1}{q-1}$, które z S_n otrzymujemy przez opuszczenie q^n

$$R_n = S_n - S = a_1\frac{q_n-1}{q-1} + \frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1 q^n}{q-1}$$

możemy dowolnie zmniejszyć obierając dostatecznie duże n, gdyż dla n dostatecznie dużego q^n, a więc i $\frac{a_1}{q-1}\cdot q^n$ przyjmuje wartość dowolnie małą. Używamy tu znowu symbolu

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} = a_1\frac{q^\infty-1}{q-1}.$$

N. p. gdy mamy szereg geometryczny

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \frac{1}{2^n}$$

to $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$;

albo także: $S_n = \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$.

Gdy n będzie dążyło w nieskończoność, wartość S_n będzie dowolnie zbliżała się do wartości $\frac{-1}{\frac{1}{2} - 1} = 2$, nigdy jednak, to znaczy, choćbyśmy ilość wyrazów tej sumy dowolnie zwiększyli, wartości tej nie osiągając. Używamy zwykle symbolu

$$S_\infty = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots \text{ in infinit} = 2.$$

Należy przez to jednak rozumieć, że nie sumujemy tu nieskończenie wielu wyrazów, gdyż to jest rzeczą niewykonalną, tylko, że przez posuwanie się ilości wyrazów tego szeregu do coraz większych wartości, wartość szeregu zbliża się coraz bardziej do 2 i może się do tej wartości dowolnie zbliżyć.

Istotną własnością granicy ciągu nieskończonego liczb następujących po sobie według pewnego prawa jest to, że różnica między dostatecznie dalekim wyrazem ciągu a granicą dowolnie się zmniejsza, jednakowoż dla żadnego wyrazu nie maleje do zera, albo innemi słowami ciąg granicy nie osiąga. Gdy więc wyraz ogólny ciągu oznaczymy przez a_n, a granicę przez g, to istota granicy tkwi w tem, że różnica $|a_n - g| < \varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą, jeżeli tylko $n > N$, gdzie N jest dostatecznie dużą liczbą całkowitą.

Praktyczna wartość pojęcia granicy jest ta, że choć wyrazy ciągu granicy nie osiągają, my znając granicę możemy zoryentować się, jak daleko posunąć się w ciągu, by różnica wartości granicy i odpowiedniego wyrazu ciągu była tak małą, że w praktyce mając na uwadze ograniczoność naszych zmysłów możemy ją zaniedbać.

N. p. mając ciąg określony szeregiem

$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n}$ zbadamy granicę

jako $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = S.$

Granicę zastąpić możemy dostatecznie dalekim wyrazem ciągu, pamiętając, że

$$S_n - S = \frac{a_1 q^n}{q-1} = -\frac{3}{9} \cdot \frac{1}{10^n}$$

Gdy więc weźmiemy S_5, to $S_5 - S = -\frac{3}{9} \cdot \frac{1}{10^5}$, zatem błąd popełniony jest równy $\frac{3}{9}$ jednostki na piątem miejscu dziesiętnem, a więc 4 miejsca dziesiętne są dokładne.

Nie zawsze jednak granica pewnego ciągu jest tak wprost widoczna. Z takiemi niewidocznemi granicami spotykamy się przy liczbach niewymiernych, a więc przy pierwiastkach liczb w pewnych wypadkach, logarytmach, szeregach dowolnie określonych, stosunkach 2 odcinków n. p. przekątni i boku kwadratu, stosunkach określających funkcye goniometryczne, stosunku obwodu koła do średnicy i we wielu innych wypadkach.

Przy pierwiastkach określamy granicę przy pomocy ciągu

$$p_0,\ p_0 + \frac{p_1}{g},\ p_0 + \frac{p_1}{g} + \frac{p_2}{g^2},\ p_0 + \frac{p_1}{g} + \frac{p_2}{g^2} + \frac{p_3}{g^3}, \ldots$$

przyczem g jest dowolnie obrana liczba całkowita n. p. 10, a $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ są tak dobrane, żeby, gdy chodzi o $\sqrt[n]{a}$, zachodziły nierówności

$$p_0^n < a < (p_0 + 1)^n$$

$$\left(p_0 + \frac{p_1}{g}\right)^n < a < \left(p_0 + \frac{p_1 + 1}{g}\right)^n$$

$$\left(p_0 + \frac{p_1}{g} + \frac{p_2}{g^2}\right)^n < a < \left(p_0 + \frac{p_1}{g} + \frac{p_2 + 1}{g^2}\right)$$

. . . .

Gdy więc chodzi o szukanie $\sqrt{2}$, to otrzymujemy nierówności:

$$1^2 < 2 < (1 + 1)^2$$

$$\left(1 + \frac{4}{10}\right)^2 < 2 < \left(1 + \frac{4 + 1}{10}\right)^2$$

$$\left(1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}\right)^2 < 2 < \left(1 + \frac{4}{10} + \frac{1 + 1}{100}\right)^2$$

Ten ciąg liczb $1,\ 1 + \frac{4}{10},\ 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}, \ldots$ dąży do pewnej granicy, gdyż wyrazy tego ciągu rosną coraz bardziej,

a przecież są ciągle mniejsze od odpowiednich coraz to mniejszych wyrazów ciągu drugiego

$$1 + 1,\ 1 + \frac{4+1}{10},\ 1 + \frac{4}{10} + \frac{1+1}{100}, \ldots,$$

przy czem różnica odpowiednich wyrazów obu ciągów wynosi kolejno $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots \frac{1}{10^n}$, a więc przy dostatecznie dalekim wyrazie staje się dowolnie małą. Na tej przestrzeni $\frac{1}{10^n}$ oddzielającej wartości n - tych wyrazów obu ciągów musi istnieć jakieś **cięcie**, które łatwo możemy uzmysłowić w odpowiednim obrazie geometrycznym t. j. na linii liczbowej, a do którego jeden i drugi ciąg dowolnie się zbliża. Wartość odpowiadająca temu cięciu jest właśnie granicą naszego ciągu, a tę granicę określamy jako $\sqrt{2}$, tak że

$$\sqrt{2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}\right) = \lim_{n \to \infty} 1{\cdot}414 \ldots p_n$$

Algebraicznie więc ta granica nie jest wprost widoczna; daleko łatwiej uzmysłowić ją sobie sposobem geometrycznym; mianowicie w trójkącie prostokątnym równoramiennym o przyprostokątni równej 1 powierzchnia kwadratu na przeciwprostokątni jest równa 2; odmierzając tedy na przeciwprostokątni przyprostokątnię, potem jej dziesiątą, setną i t. d. część tyle razy, ile razy najwięcej da się, zbliżamy się w tym procesie dowolnie do granicy, którą właśnie jest długość samej przeciwprostokątni, wyrażamy zaś ją liczbą $\sqrt{2}$.

Trudniej jeszcze przedstawia się sprawa przy logarytmie $\log_b a$, o ile on nie jest wymiernym. Wtedy mamy do rozwiązania równanie $b^x = a$.

Używamy tu znowu ciągu podobnego, jak w poprzednim wypadku, zbudowanego na podstawie nierówności:

$$b^{p^0} < a < b^{p_0 + 1}$$

$$b^{p_0 + \frac{p_1}{g}} < a < b^{p_0 + \frac{p_1 + 1}{g}}$$

$$b^{p_0 + \frac{p_1}{g} + \frac{p_2}{g^2}} < a < b^{p_0 + \frac{p_1}{g} + \frac{p_2 + 1}{g^2}}$$

. . . .

Rozważanie tych 2 ciągów, których wyrazy zbliżają się coraz bardziej do siebie, doprowadzi nas do granicy, do której dąży każdy z tych ciągów, nie osiągając jej jednak. Wartość tej granicy określamy jako $\log_b a$.

Wreszcie ciąg wyrazów możemy określić dowolnie, n. p. $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, jest ciąg liczb rosnących ciągle przy rosnącem n:

$$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$$

Na podstawie wzoru potęgowego Newtona mamy:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots 2}{1\,.\,2\cdots(n-1)}\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\,.\,2} +$$

$$+ \frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\ldots n}$$

Wartość sumy tych wyrazów z wyłączeniem dwu pierwszych jest mniejszą od sumy szeregu:

$$\frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{1.\,2.\,3} + \ldots + \frac{1}{1.\,2.\,3\ldots n}.$$

Ta zaś suma jest mniejszą od sumy szeregu geometrycznego: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, mającego granicę 1.

Zatem wartość n-tego wyrazu naszego ciągu jest mniejszą od 3; z rozwinięcia tego wyrazu widać, że wartość jego w miarę rosnącego n również ciągle wzrasta i coraz mniej różni się od wartości sumy: $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{1.\,2.\,3} + \ldots + \frac{1}{1.\,2.\,3.\,n}$.

Ostatnia suma rośnie również, ale nie może róść poza dowolną granicę, gdyż zawsze musi pozostać mniejszą od 3. Jaka ta granica, nie jesteśmy w stanie dokładnie oznaczyć; pokazuje

się, że nawet sposobem geometrycznym nie da się uzmysłowić; oznaczamy ją, jak wiadomo, przez

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.\ 2} + \dots + \frac{1}{1.\ 2.\ 3 \dots n}\right) =$$

$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ in inf.; w praktyce zaś, zadowalamy się jej przybliżoną wartością $e_n = 2{\cdot}71828$.

W ten sam sposób dochodzimy do pojęcia granicy nie dającej się dokładnie przedstawić w zagadnieniach geometrycznych, w szczególności przy badaniu stosunku obwodu koła do średnicy i stosunków określających funkcye goniometryczne.

Jeżeli specyalnie zatrzymamy się przy kole i przez s_n oznaczymy bok n boku umiarowego wpisanego w koło, przez S_n bok n boku umiarowego opisanego na kole, a przez r jego promień *), to podług wzorów planimetryi otrzymujemy proporcyę $U_n : u_n = OE : OF$, gdzie U_n i u_n przedstawiają obwód n boku umiarowego opisanego, względnie wpisanego w koło. Stąd przez przekształcenie mamy:

$$(U_n - u_n) : U_n = (OE - OF) : OE$$

$$\text{albo} \quad U_n - u_n = \frac{U_n}{OE} (OE - OF).$$

Nadto z figury wynika, że U_n ze wzrostem (n. p. podwajaniem) n ciągle maleje, u_n zaś w tym samym wypadku rośnie; różnica zaś: OE — OF, jest mniejsza od s_{2n}; ten bok znowu przy dostatecznie dużem n może przyjąć dowolnie małą wartość. Zatem obydwa obwody i U_n i u_n zbliżają się ciągle do siebie, a więc przez to i do pewnej granicy, którą nazywamy wielkością obwodu koła. Do tej granicy możemy się dowolnie zbliżyć, ale znowu jej nigdy nie osiągamy. Równocześnie także stosunek $\frac{u_n}{2r}$ dąży dla wszystkich kół do pewnej granicy, gdyż $\frac{s_n}{r}$, a zatem i $\frac{u_n}{2r}$ jest dla wszystkich kół równe. Granicę tę znaczymy, jak wiadomo, przez π i stosując n. p. metodę wyczerpywania (Exhaustionsmethode) Archimedesa, zbliżamy się dowolnie do wartości tej granicy.

---

*) Patrz fig. 3. tablic.

Możemy i tak postąpić:

$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}$$

$$s_{2n} = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}}$$

$$s_{2n} = r\sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{1 + \frac{s_n}{2r}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{s_n}{2r}}{2}}\right]$$

$$s_{2n} = r\left[\sqrt{1 + \frac{s_n}{2r}} - \sqrt{1 - \frac{s_n}{2r}}\right]$$

$$\frac{s_{2n}}{r} = \sqrt{1 + \frac{s_n}{2r}} - \sqrt{1 - \frac{s_n}{2r}}$$

Kładąc $r = 1$ otrzymujemy

$$s_{2n} = \sqrt{1 + \frac{s_n}{2}} - \sqrt{1 - \frac{s_n}{2}}.$$

A stąd ponieważ $s_6 = 1$, $u_6 = 6$

$$s_{12} = \sqrt{1 + \tfrac{1}{2}} - \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}} \doteqdot^{*)} 1{\cdot}22 - 0{\cdot}70 = 0{\cdot}52$$

$$u_{12} \doteqdot 0{\cdot}52.12 = 6{\cdot}24$$

$$s_{24} \doteqdot \sqrt{1{\cdot}26} - \sqrt{0{\cdot}74} \doteqdot 1{\cdot}122 - 0{\cdot}860 = 0{\cdot}262$$

$$u_{24} \doteqdot 0{\cdot}262.24 = 6{\cdot}28$$

$$\frac{u_{24}}{2r} = \frac{u_{24}}{2} \doteqdot 3{\cdot}14.$$

Tu zresztą możemy osiągnąć dowolną dokładność, a więc dowolnie zbliżyć się do granicy i zawsze podać z dostateczną dokładnością możliwie najwyższy popełniony błąd.

Umyślnie zatrzymałem się dłużej przy pojęciu granicy i starałem się je wyjaśnić na typowych przykładach, gdyż w podręcznikach szkolnych te przykłady traktuje się więcej formalistycznie, nie wchodząc należycie w naturę granicy, a gdzieniegdzie wprost chaotycznie.

---

*) $\doteqdot$ znak na przybliżoną równość.

Umyślnie przytoczę ustęp z rozprawki Kazimierza Strutyńskiego*): Wartość $\sqrt{2}$ można metodą próbowania zawrzeć pomiędzy dwoma szeregami:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_m}{a^m} < \sqrt{2} < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a^m + 1}{10^m}$$

Obydwa szeregi zdążają do tej samej granicy. Jeżeli graniczna wartość szeregu z lewej strony wynosi n. p. s', a szeregu z prawej s, to różnica tych dwu granic $s' - s = \frac{1}{10^m}$, co znaczy, że wartości obydwu szeregów obecnie różnią się o jedną jednostkę najniższego miejsca dziesiętnego, jeżeli przyjdziemy do granicy, do której zdążają szeregi, a więc gdy m staje się $= \infty$, to $\lim\limits_{m=\infty} s' - s = \frac{1}{10^m} = \frac{1}{\infty} = 0$, to znaczy różnica wartości obu szeregów w granicy zdąża do wartości zera, ale nigdy niem się nie stanie". Z tego przedstawienia chyba nikt jasnego pojęcia granicy nie zdoła sobie wyrobić.

3. Pochodna jako granica.

W świetle powyższych uwag o pojęciu granicy przypatrzmy się określeniu pochodnej pewnej funkcyi przy pomocy metody różniczek i metody granicy.

Zacznijmy od metody granic.

Wychodząc od przykładu ruchu, określonego wzorem $s = at^2$, rozważajmy przyrost drogi $\Delta s = s' - s$ w zestawieniu ze zmianą czasu $\Delta t = t' - t$.

Otóż stosunek $\frac{s' - s}{t' - t}$ jest dla każdego Δt różnego od 0 dokładnie oznaczony i wynosi: $\frac{s' - s}{t' - t} = a(t + t') = 2at + a\Delta t$.

Gdy położymy w tym stosunku $\Delta t = 0$, przestaje on być oznaczonym.

Wstawiając jednak za Δt coraz to mniejsze wartości n. p. $\Delta t = \frac{1}{n}$, gdzie n przyjmuje coraz to większe wartości, otrzymamy ciąg wartości tego stosunku, powiedzmy $v_1, v_2, v_3 \cdots v_n$,

---

*) Muzeum, styczeń 1911: „Kilka uwag w sprawie nauki matematyki w szkołach średnich..." str. 43.

z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej, a z których dostatecznie daleka zbliża się dowolnie do wartości 2at, gdyż różnica $(2at + a\Delta t) - 2at = a\Delta t$, a więc może stać się dowolnie małą, jeżeli tylko Δt stanie się dostatecznie małe.

Wartość 2at jest więc granicą, do której zdąża stosunek $\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at + a\Delta t$, jeżeli Δt dąży do granicy 0. Piszemy więc symbolicznie

$$\lim_{t' \to t} \frac{s' - s}{t' - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2at.$$

Podczas gdy stosunek $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ przedstawia t. zw. prędkość średnią w odstępie czasu Δt, to granica już prędkości nie przedstawia, gdyż nie jest określona jako stosunek drogi do czasu, ale przecież ona ruch w odstępie czasu Δt następującym po momencie t dostatecznie określa przez to właśnie, że prędkość średnia w czasie Δt tem mniej różni się od wartości 2at, im mniejsze jest Δt.

Dlatego symbolicznie możemy się wyrazić, że $\lim_{t' \to t} \frac{s' - s}{t' - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ i w wypadku przytoczonym i w ogólnym wypadku, jeżeli w ogóle granica istnieje, przedstawia prędkość w momencie t; nie powstaje przez to sprzeczność z pojęciem prędkości, gdyż prędkość przez położenie punktu poruszającego się w pewnym momencie czasu nie jest określoną, a to, co zwykle mamy na myśli, mówiąc o prędkości chwili, jest prędkością średnią w krótkim odstępie czasu, następującym po danym momencie, albo prędkością średnią w małym odstępie poprzedzającym dany moment, a o której przypuszczamy w wypadku ciągłego ruchu i to zwykle łącząc ruch z pojęciem bezwładności i siły, że ona w bardzo małym następującym odstępie czasu zmieni się tak mało, że ta zmiana praktycznie nie wchodzi w rachubę.

Podobnie ma się rzecz i z zagadnieniem stycznej. Weźmy więc pod uwagę krzywą, określoną równaniem $y = ax^2$, a więc krzywą, u której rzędna y dowolnego punktu jest zależna od wielkości odciętej x podług wymienionego prawa algebraicznego.

Dla rysunku*) obierzmy dla a szczególną wartość $a = \frac{1}{4}$. Obierając w sąsiedztwie punktu M na krzywej o współrzędnych x i y punkt M' o współrzędnych x', y', otrzymujemy na stosunek przyrostu rzędnej do przyrostu odciętej wzór:

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax'^2 - ax^2}{x' - x} = a(x + x') = 2ax + a\Delta x.$$

Ten stosunek nazywamy, jak wiadomo, styczną kąta s, jaki tworzy sieczna z dodatnim kierunkiem osi 0x.

$$\text{Zatem} \quad \operatorname{tg} s = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

Ten wzór jest ważny, dopóki Δx i Δy są wprawdzie małe, ale różne od zera; gdy $\Delta x = 0$ i $\Delta y = 0$, wtedy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ przechodzi w wyraz nieokreślony $\frac{0}{0}$, a więc mechaniczne stosowanie wzoru poprzedniego omija i zaciemnia przejście graniczne.

Logicznie należy rzecz traktować w ten sposób:

Jeżeli na Δx obierzemy wartości stopniowo malejące podług pewnego prawa n. p. $\Delta x = \frac{1}{n}$, wtedy stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ daje nam ciąg wartości również malejących n. p. $\operatorname{tg} s_1, \operatorname{tg} s_2, \operatorname{tg} s_3, \cdots \operatorname{tg} s_n$, ale tak, że różnica między dostatecznie dalekim wyrazem ciągu a 2ax, a więc $\frac{\Delta y}{\Delta x} - 2ax = a\Delta x$ staje się mniejszą od dowolnie małej wielkości, gdy mianowicie Δx obierzemy odpowiednio małe. Zatem 2ax jest granicą, do której dąży $\operatorname{tg} s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy Δx dąży do 0. Piszemy to w ten sposób:

$$\lim_{x' \to x} \frac{y' - y}{x' - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{M' \to M} \operatorname{tg} s = 2ax.$$

Ta wartość określa kierunek pewnej prostej TT' w punkcie M podług równania: $\operatorname{tg} t = 2ax$, która ma tę własność, że różnica $\operatorname{tg} s - \operatorname{tg} t$, a więc także $s - t$ staje się dowolnie małą, jeżeli punkt M' dostatecznie zbliży się do punktu M. Ta prosta nie jest sieczną, gdyż jej nachylenie nie jest określone stosunkiem $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lecz $\operatorname{tg} t < \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (ogólnie $\operatorname{tg} t \gtrless \frac{\Delta y}{\Delta x}$), ale przez punkt M przechodzi i ma tę własność, że do niej sieczna dowolnie się zbliża, jest więc granicą, do której sieczna dowolnie się zbliża,

*) Patrz fig. 4. tablic.

ale jej nie osiąga, choć Δx stanie się dowolnie małe. Taką prostą nazywamy styczną w punkcie M.

W tym wypadku styczną, jako granicę siecznej, wyznacza prawo algebraiczne krzywej; można ją także wyznaczyć jako granicę za pomocą rozważania czysto geometrycznego, jeżeli znamy geometryczne prawo krzywej. Weźmy n. p. styczną do koła. Zwykle określa się ją jako prostą mającą z kołem jeden punkt wspólny; że to jednak nie jest cechą charakterystyczną stycznej, wynika z prostego rozważania, że przy niektórych krzywych n. p. $y = x^3$, styczna w pewnym punkcie przecina przecież krzywą w jednym lub więcej punktach. Właściwie i przy kole istotną cechą stycznej jest to, że do niej sieczna dowolnie się zbliża. Że ten warunek spełnia się dla prostopadłej w końcu promienia, wynika z prostego rozważania geometrycznego*).

Mianowicie kąt między sieczną SS' a prostopadłą w końcu promienia TT' — $\delta = 90 - \beta$, $\beta = 90 - \frac{\alpha}{2}$, zatem $\delta = \frac{\alpha}{2}$.

Gdy punkt M' zbliża się coraz bardziej do M, α maleje do granicy 0, a zatem i δ maleje do granicy 0, innemi słowy dla M' dostatecznie blizkiego M, δ dowolnie mało różni się od zera, a więc sieczna SS' dowolnie mało różni się od TT'; TT' jest więc styczną.

Powszechnie mówi się, że styczna w pewnym punkcie krzywej swoim kierunkiem wyznacza kierunek nieskończenie małego elementu krzywej. Jest to zdanie niezupełnie ścisłe, bo nieskończenie mały element krzywej jest 0; jeżeli nie jest zerem, jest ograniczony dwoma różnymi punktami, a więc wyznacza sieczną, różną od stycznej. Ściśle biorąc, o nachyleniu krzywej w jednym punkcie nie można mówić, można jednak wprowadzić symboliczne wyrażanie się, że styczna wyznacza kierunek krzywej w danym punkcie, rozumiejąc przez to ciągle, że sieczna poprowadzona przez dany punkt i sąsiedni, a określająca średnie nachylenie krzywej, przy zbliżaniu się punktu M' do M zbliża się dowolnie do nachylenia stycznej.

Z takiego określenia stycznej wynika jeszcze jedno spostrzeżenie, mogące rzucić pewne światło na pojmowanie stycznej. Szukajmy mianowicie oddalenia**) pewnego punktu krzywej M' i punktu M'' na stycznej, przyjmując znowu krzywą: $y = ax^2$.

*) Patrz fig. 5. tablic.
**) Patrz fig. 6. tablic.

Otóż $M' M'' = M' N - M'' N$
$= (y' - y) - (x' - x) \operatorname{tg} t.$

Stąd $\frac{M' M''}{x' - x} = \frac{y' - y}{x' - x} - \operatorname{tg} t = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \operatorname{tg} t.$

Ta różnica $\frac{\Delta y}{\Delta x} - \operatorname{tg} t$ podług określenia stycznej dąży równocześnie z Δx do granicy 0; zatem

$$\lim_{x' \to x} \frac{M' M''}{x' - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{M' M''}{\Delta x} = 0.$$

A zatem stosunek oddalenia punktu na krzywej od stycznej do Δx maleje tem bardziej, im bardziej punkt M' dąży do M, zbliżając się coraz bardziej do wartości 0. I to jest może najistotniejsza własność stycznej.

Takie określenie stycznej (jako granicy siecznej) jest i dla praktycznego kreślenia stycznej rzeczą ważną; w praktyce bowiem wystarcza dla konstrukcyi stycznej w pewnym punkcie, jeżeli sieczną przez ten punkt obracamy tak długo, aż różnica między sieczną a łukiem krzywej stanie się tak małą, że ze względu na ograniczoność naszego wzroku nie da się spostrzedz. Dokładna konstrukcya jednak wymaga zbadania związku matematycznego, normującego przebieg krzywej w otoczeniu uważanego punktu.

Kiedy się już doszło do pojęcia przejścia granicznego w tych 2 typowych a analogicznych pod względem matematycznym wypadkach, łatwo przejść do określenia pochodnej. Wystarczy zająć się przytem tylko jednym wypadkiem n. p. $y = ax^2$.

Otóż każdej wartości na x odpowiada pewna wartość granicy stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, zwanego stosunkiem różnicowym, podług wzoru: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax.$

Wartość tej granicy jest więc zależną od x, czyli funkcyą x, a że sposób tej zależności jest określony związkiem początkowym: $y = ax^2$, nazywamy ją funkcyą pochodną funkcyi y. Symbolicznie można ją przedstawiać znakiem Dy (derivée). Byłoby więc w tym wypadku: $Dy = 2ax$.

Jak do tego dołączyć rozważania ogólne, a więc symboliczne oznaczanie funkcyi ogólnej $y = f(x)$, rozważania, czy i w ogólnym wypadku granica stosunku różnicowego jest dla

każdego x określona i kiedy przestaje być dla pewnych x określoną, dalej ogólne znakowanie przy pochodnej

$$Dy = f'(x)$$

jest rzeczą nie wymagającą szczegółowych objaśnień.

Tak samo łatwo uogólnić znakowanie przy operowaniu innemi wielkościami zmiennemi zależnemi; n. p. przy prędkości napiszemy: $Ds = f'(t)$ i t. d.

4. Pochodna jako stosunek różniczkowy.

Celem zrozumienia tego zagadnienia wyjdźmy od wyjaśnień, jakie nam daje książka Dziwińskiego*). Autor określa liczby nieskończenie małe jako mniejsze od wszelkiej jednostki ułamkowej $\frac{1}{n}$, choćby najmniejszej; uważając je dalej za zera wobec liczb skończonych porównuje je ze sobą tak, jak liczby skończone, a mianowicie znacząc jednostkę nieskończenie małą rzędu pierwszego przez h, nazywa drugą liczbę ah, będącą skończoną wielokrotnością liczby h liczbą nieskończenie małą tego samego rzędu, co h; liczbę h^2, a tak samo ah^2, której stosunek: $\frac{h^2}{h} = h$ jest nieskończenie małą liczbą pierwszego rzędu, nazywa liczbą nieskończenie małą drugiego rzędu, a tak samo określa liczby nieskończenie małe wyższych rzędów.

W drugiem miejscu określa różniczkę wielkości zmiennej dx jako wielkość zmienną nieskończenie małą, występującą jako zmiana wielkości zmiennej x, graniczącą z zerem, a jednak różną od zera. Do tego dodaje wyjaśnienie, że różniczka dx przedstawia wielkość, nie dającą się zmierzyć zapomocą jednostki skończonej, a jednak nie będącą bezwzględnem zerem, że dalej nie jest ona wielkością stałą, tylko zmienną, wreszcie dla stwierdzenia, że różniczka dx nie jest bezwzględnie zerem, lecz tylko znikomą wobec wszelkiej wielkości skończonej, dodaje, że możemy ją przedstawić w celach praktycznych dowolnie małą liczbą, stosownie do rodzaju zagadnień, w których ją stosujemy.

Następnie przedstawia metodę różniczek, zwaną także metodą Leibnitz'a, polegającą na wyznaczaniu różniczki funkcyi

---

*) Dziwiński, l. c. str. 150 i 184.

$y = f(x)$ bezpośrednio z wzoru: $dy = df(x) = f(x + dx) - f(x)$, prowadzącego do wyniku: $dy = df(x) = f'(x)\,dx$, z którego dochodzi się do pojęcia pochodnej funkcyi jako stosunku dwu różniczek, albo t. zw. stosunku różniczkowego

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Na przykładzie wygląda to tak:

$$y = x^3;\ dy = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2\,dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3.$$

Opuszczając wyrazy $(dx)^2$ i $(dx)^3$ wobec dx jako wyrazy nieskończenie małe wyższych rzędów, otrzymuje się: $dy = 3x^2\,dx$, a stąd funkcyę pochodną:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(x^3)}{dx} = 3x^2.$$

Wreszcie dowodzi autor, że pochodna jako stosunek różniczkowy jest granicą stosunku różnicowego danej funkcyi

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Podręcznik „Mocnik-Zahradnicek“ *) określa najpierw stosunek różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, a jego granicę nazywa stosunkiem różniczkowym i znaczy przez $\frac{dy}{dx}$. Pisze tedy: $y = F(x)$, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Stosunek ten jako funkcyę x nazywa funkcyą pochodną i znaczy przez y', $F'(x)$, Dy, $DF(x)$. Różniczki jednak ani nie określa, ani nią nie operuje.

Dosyć ciekawie określa różniczkowanie książka Hoborskiego i Wilka**); mianowicie różniczką dx zmiennej niezależnej x dla funkcyi $y = f(x)$ nazywa dowolny przyrost h zmiennej x, który ma za granicę zero; różniczką funkcyi y, którą oznacza przez dy, nazywa iloczyn pochodnej funkcyi, określonej jako granica ułamka $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ dla $h = 0$, i różniczki zmiennej niezależnej, zatem

$$dy = f'(x)\,dx, \text{ stąd } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

---

*) Arithmetik u. Algebra für V. bis VII. Klasse der Realschulen 1911. Str. 167.

**) Zasadnicze pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego 1910. str. 68.

Wreszcie Höfler w swojej dydaktyce*) określa pochodną jako granicę stosunku różnicowego i również zaleca używanie powszechnie przyjętego w rachunku różniczkowym symbolu $\frac{dy}{dx}$ zamiast $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x' = x} \frac{y' - y}{x' - x}$ pod warunkiem, że przy tym symbolu $\frac{dy}{dx}$ ma się na myśli nie stosunek granic (a więc 2 zer) ale wyłącznie granicę stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, którą tenże osiąga, gdy Δx i Δy swe granice (zero) osiągną; zupełnego wyrugowania znaków dx i dy nie zaleca, zwłaszcza ze względu na symbol rachunku całkowego: $\int y\, d\, x$.

Cóż więc właściwie mamy rozumieć przez różniczkę? Podług wymienionych określeń jest różniczka dx zmianą wielkości zmiennej x, mającą za granicę zero, a jednak różną od zera, dalej wielkością zmienną, którą można przedstawić dowolnie małą liczbą; różniczka zmiennej zależnej jest określona wzorem matematycznym. Otóż przedewszystkiem przy słowie „różniczka" mamy na myśli jakąś małą różnicę, małą zmianę, a więc niestosownem wydaje mi się określenie różniczki dy jako $f'(x)dx$.

Określenie dx jako wielkości nieskończenie małej, a więc mniejszej od wszelkiej choćby najmniejszej jednostki ułamkowej, a jednak różnej od zera, kryje w sobie nieprzezwyciężoną trudność dla umysłu ludzkiego, gdyż każdą wielkość różną od zera wyobrażamy sobie jako wielkość o pewnych rozmiarach, a jednostkę ułamkową można zmniejszać dowolnie; dlaczegóżby więc nie można pomyśleć jej sobie tak małej, żeby była mniejszą od naszej różniczki; wtedy zaś różniczka przestaje być nieskończenie małą. Jeszcze większą zawiłość wprowadza określenie różniczki jako wielkości zmiennej, którą można przedstawić dowolnie małą liczbą. Dla umysłu dojrzałego i przywykłego do operowania symbolami matematycznymi jest rzeczą nadzwyczaj trudną łączyć z takiem określeniem różniczki jakieś wyobrażenie, a cóż dopiero dla umysłu młodego, dla którego rzeczy skończone i łatwo wyobrażalne nie zawsze są dość jasne.

Wielkość mniejsza od każdej dowolnie małej wielkości jest zerem; a zatem wypada różniczkę jako wielkość nieskończenie

---

*) Höfler, Didaktik 1910, str. 398.

małą uważać za zero; chcąc jednak w to 0 wnieść pewną treść, wskazanem byłoby określać rożniczkę dx zmiennej niezależnej x jako granicę, do której dąży zmiana $x' - x$ zmiennej x, gdy x' coraz bardziej zbliża się do x, aż do zejścia się z x.

$$dx = \lim_{x' \to x} (x' - x).$$

Podobnie wypada określić różniczkę dy funkcyi jako granicę zmiany $y' - y$ tej funkcyi, gdy x' dąży coraz bardziej do x, albo gdy $x' - x$ dąży do różniczki: $dy = \lim\limits_{x' \to x} (y' - y)$. Jeżeli funkcya y jest dla wartości x ciągłą, to i dy należy uważać za zero, gdyż $\lim\limits_{x' \to x} (y' - y) = 0$.

Przy takiem określeniu, nie zawierającem przynajmniej rzeczy niewyobrażalnych, będzie stosunek różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ niczem innem, jak $\frac{\lim (y' - y)}{\lim (x' - x)}$ dla $x' \to x$, a zatem stosunkiem 2 zer, nie ma więc żadnej oznaczonej wartości, gdyż stosunek 2 bezwzględnych zer: $\frac{0}{0}$, może, jak wiadomo, przyjąć dowolną wartość. Gdy jednak zważymy, że w ogólnym wypadku

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

i że analogicznie zbudowany wzór: $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim \Delta y}{\lim \Delta x}$ dla $\Delta x \to 0$ nie przedstawia żadnej sprzeczności, gdyż lewa strona jest pochodną dla wartości x, a prawa jako symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ może przyjąć dowolną wartość, możemy przyjąć powyższy wzór wprost jako określenie stosunku różniczkowego:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Mnożąc obie strony przez dx formalnie, a więc nie troszcząc się o to, że jest to właściwie 0, otrzymujemy wzór: $dy = f'(x)dx$, nie zawierający sprzeczności, gdyż po lewej i po prawej stronie mamy 0. Ten wzór pozornie nie przedstawia żadnej treści, możemy mu jednak pewną treść przypisać. Mianowicie z określenia pochodnej jako granicy wynika, że

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \text{ przyczem } \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$$

albo $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$

czyli $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon_1$, gdzie $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\Delta x} = 0$.

Wzór ten wyraża, że zmiana funkcyi odpowiadająca zmianie zmiennej niezależnej równa się iloczynowi z pochodnej funkcyi przez Δx powiększonemu o wielkość, która przy malejącem Δx daleko szybciej maleje, aniżeli Δx, gdyż $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\Delta x} = 0$. Wielkość tę ε_1 możnaby nazwać wielkością w 2 razy szybszym stopniu dążącą do zera, aniżeli Δx.

I przeciwnie, jeżeli w jakikolwiek sposób dojdziemy do wyrażenia: $\Delta y = g(x)\Delta x + \varepsilon_2$, przy czem pokaże się, że

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_2}{\Delta x} = 0, \text{ to } \frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x) + \frac{\varepsilon_2}{\Delta x}$$

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x)$; zatem $g(x)$ jest już pochodną funkcyi $f(x)$; $g(x) = f'(x)$.

N. p. $y = x^2$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, więc

$$2x = Dy.$$

Otóż wzorowi $dy = f'(x)dx$ nadajemy znaczenie takie, że on jest równoważny z wzorem:

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon_1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_1}{\Delta x} = 0$, a więc także z wzorem:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \text{ albo } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Innemi słowami z wzoru wyrażającego różniczkę y przy pomocy różniczki x otrzymujemy pochodną, dzieląc formalnie ten wzór przez dx, a następnie interpretując $\frac{dy}{dx}$ jako granicę stosunku różnicowego: $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A więc w powyższym przykładzie mielibyśmy:

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

To jest podług poprzednich objaśnień równoważne z wzorem:

$$dy = 2x\,dx$$

a stąd $\frac{dy}{dx} = Dy = 2x$.

Możemy wreszcie w tej symbolicznej interpretacyi jeszcze dalej się posunąć; zastępując we wzorze: $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ różnice przez różniczki otrzymujemy: $dy = 2xdx + (dx)^2$, jako równość 2 zer. Gdy zestawimy ją z wzorem $dy = 2xdx$, zobaczymy, że i ona mogłaby przez podzielenie przez dx dać wielkość pochodnej, gdy przed dzieleniem położymy $(dx)^2 = 0$ albo po podzieleniu we wzorze: $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$ położymy $dx = 0$.

Tę symbolikę można uogólnić i przyjąć jako metodę szukania pochodnej tworzenie różniczki dy zmiennej zależnej w sposób formalny tak, jak gdyby ona była zmianą skończoną, przy pomocy tak samo wyobrażanej różniczki zmiennej niezależnej dx, przez opuszczanie we wzorze: $dy = g(x)dx + a(dx)^2 + b(dx)^3 + \cdots$ wyrazów zawierających różniczkę dx w potęgach wyższych od pierwszej, dzielenie formalne obu stron przez dx i interpretacyę stosunku różniczkowego $\frac{dy}{dx}$ jako granicy stosunku różnicowego. Wogóle wszystkie symbole będą zawsze opierały się na wzorach dla pochodnej, pojmowanej jako granica.

5. Obie metody rachunku różniczkowego.

Jeżeli chodzi o porównanie obu metod rachunku różniczkowego, to różnica wpada natychmiast w oczy.

Metoda granicy operuje wielkościami ściśle określonemi, gdyż bada określony szereg (ciąg) liczb i szuka jego granicy, t. j. wielkości, do której dostatecznie daleki wyraz szeregu dowolnie się zbliża. Metoda różniczek, określająca różniczki jako wielkości nieskończenie małe, ale różne od zera a nadto zmienne, przedstawia logiczne sprzeczności w pojmowaniu samej różniczki; ta sama zaś metoda określająca różniczki jako granice zmian wielkości zmiennych, gdy zmiana Δx dąży do zera, operuje tylko symbolicznymi wzorami i z tego powodu wymaga bardzo rozwiniętej wyobraźni celem uzmysłowienia sobie rachunku; nadto określenie samych symboli opiera się na znajomości metody granic; co prawda, pod względem formalnym, to jest pod względem szybkości, z jaką dochodzimy w każdym poszczególnym wypadku do pochodnej, stoi metoda różniczek wyżej od metody granic; specyalnie metoda granic nie może po prostu obejść się

bez symbolu różniczek, zwłaszcza symbolu $\frac{dy}{dx}$; pod względem ścisłości w rachowaniu jednak i zupełnej niezależności od metody różniczek metoda granic jest bardziej wskazaną w nauce szkolnej, aniżeli metoda różniczek.

Nie da się zaprzeczyć, że takie pojmowanie różniczki i granicy nie wyczerpuje istoty rzeczy, gdyż przy pojęciu granicy przeskakujemy proces zbliżania się do granicy przez wszystkie dowolnie mało od granicy różniące się wielkości, podczas gdy w rzeczywistości ten proces zbliżania się istnieje; jeżeli bowiem punkt jakiś po kolei znajduje się w 2 miejscach, musi w międzyczasie zająć szereg położeń w sposób ciągły po sobie następujących, jednakowoż między wyobrażeniem pewnej odległości punktów, a wyobrażeniem znikania tej odległości i gubienia się jej w jednym punkcie jest skok, dla umysłu ludzkiego niedostępny.

Jednak dla praktycznych celów wzór

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = 0$$

zamienia się po opuszczeniu ε, jeżeli Δx jest dostatecznie małe, na $\Delta y = f'(x)\Delta x$, albo przeciwnie wzór $dy = f'(x)dx$ otrzymuje interpretacyę wyraźną, a mianowicie, że dx i dy nie są zerami, ale dostatecznie małemi zmianami. Błąd popełniony przy takiej interpretacyi można przez dostateczne zmniejszenie Δx zmniejszyć do wartości nie wchodzącej w praktyce w rachubę.

III.

Zasadnicze prawidła różniczkowania i ich zastosowanie.

Badanie przebiegu krzywych przedstawiających zależność 2 wielkości a tem samem i zachowania się funkcyi przy pomocy pochodnej może zacząć się bardzo wcześnie i powinno się odbywać metodą indukcyjną, a dopiero pod koniec studyów metodą dedukcyjną.

Punkt wyjścia stanowić będą funkcye:

$y = x$, $y = x \pm a$, $y = ax$, $y = ax \pm b$, $y = ax^2$, $y = ax^3$, $\cdots$ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$.

Ogólny wzór dla pochodnej funkcyi: $y = ax^n$ możliwem będzie wyprowadzić po poznaniu wzoru potęgowego Newton'a.

Te zależności należy uzmysławiać przykładami praktycznymi, zwłaszcza z fizyki; zwróci się więc uwagę na prawo ruchu jednostajnego: $s = ct$, na prawa ruchu jednostajnie przyspieszonego i opóźnionego: $s = ct \pm \frac{1}{2} a t^2$, przyczem przedstawi się je graficznie i wyszuka się prędkość, a ewentualnie i przyspieszenie; dalej można wymienić wzór na siłę: $P = ma$, na pracę: $L = Ps$, na energię kinetyczną: $K = \frac{mv^2}{2}$, na siłę odśrodkową: $P = \frac{mv^2}{r}$, na prawo ruchu obrotowego: $M = B\alpha$, na proporcyonalność podwyższenia temperatury ciała i ciepła dostarczonego, proporcyonalność potencyału elektrycznego ciała i naboju ciała, proporcyonalność ciężaru ciała i jego objętości i t. d.

Przed badaniem funkcyi: $y = x^n$, dla ujemnych całkowitych wartości na n wskazanem jest wyjaśnić różniczkowanie iloczynu i ilorazu 2 funkcyi tej samej zmiennej x. Przy iloczynie nasuwa się jako przykład z fizyki zmiana powierzchni prostokąta materyalnego pod wpływem zmiany temperatury.

Dla ilorazu dwu funkcyi tej samej zmiennej x stosowny przykład stanowiłby stosunek gęstości 2 ciał przy tej samej,

ale zmiennej temperaturze, albo n. p. czułość wagi jako funkcya temperatury.

W szczególności, gdy $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, licznik mimo zmiany x nie zmienia się, zatem jego pochodna jest równa zeru.

Dla $n = 1$ i $n = 2$, a więc dla $y = \frac{a}{x}$, $y = \frac{a}{x^2}$ znajdujemy przykłady fizyczne: w prawie Boyle-Mariotte'a: $p = \frac{c}{v}$, we wzorze na potencyał V kuli o promieniu r o pewnym naboju Q, $V = \frac{Q}{r}$, w prawie Ohm'a: $i = \frac{V}{w}$, we wzorze na siłę odśrodkową: $P = \frac{mv^2}{r}$, w prawie grawitacyi Newton'a i prawie działania na siebie 2 nabojów elektrycznych: $P = \frac{m_1 m_2}{r^2}$, we wzorze na natężenie głosu, względnie światła w odległości r od źródła: $i = \frac{I}{r^2}$, i t. d.

Przy pierwiastkach, a więc funkcyi: $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, wskazanem jest wprowadzić funkcyę odwrotną: $x = y^n$, i oprzeć się na ogólnem twierdzeniu, że

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}, \quad \text{albo} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Badanie funkcyi: $y = x^{\frac{m}{n}}$, jest możliwe przez rozkład jej na iloczyn: $y = x^{\frac{1}{n}} \, x^{\frac{1}{n}} \ldots . \, x^{\frac{1}{n}}$, i przez zastosowanie wzoru na pochodną iloczynu.

Wreszcie dla: $y = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ stosujemy wzór na pochodną ilorazu i pochodną funkcyi $x^{\frac{m}{n}}$.

Tym wywodom powinny towarzyszyć ciągłe przedstawienia tabelaryczne i graficzne funkcyi specyalnych, jako to: $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}, \ldots y = x^{\frac{2}{3}}, \ldots y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \cdots$ a nadto przykłady funkcyi empirycznych i geometrycznych. Przykładami z fizyki mogą być:

wzór na prędkość wyrażoną przy pomocy drogi przy ruchu jednostajnie przyspieszonym, $v = \sqrt{2as}$, wzór na czas wahania wahadła: $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, i t. d.

Różniczkowanie funkcyi goniometrycznych: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$, przyczem x przedstawia kąt w mierze łukowej, t. j. stosunek łuku koła do promienia, wymaga tylko uzasadnienia, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, co łatwo wywnioskować z nierówności:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Pochodne tych funkcyi nastręczą wiele sposobności do badania przebiegu ich obrazów geometrycznych a zarazem i samych funkcyi. W szczególności można zająć się przy funkcyach $y = \sin x$ i $y = \cos x$ temi wartościami na x, dla których y osiąga wartość największą lub najmniejszą, a dla których pochodna $\frac{dy}{dx} = 0$.

Badanie funkcyi złożonej, czyli funkcyi jakiejś wielkości, która sama jest funkcyą innej wielkości, jest wprawdzie przez nowy plan wyłączone z zakresu nauki szkolnej; że jednak plan dopuszcza badania takiej funkcyi w pewnych wypadkach, to widać choćby z zagadnienia stycznych do krzywych drugiego rzędu. Zważywszy n. p., że równanie koła: $x^2 + y^2 = r^2$, jest równoważne z funkcyą: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, przychodzimy do przekonania, że współczynnik kierunkowy stycznej: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, jest właśnie pochodną funkcyi złożonej, którą można przedstawić w formie $y = \sqrt{z}$, $z = r^2 - x^2$.

Podobnie ma się rzecz z logarytmami funkcyi goniometrycznych. Szukanie poprawek przy takich logarytmach opiera się na rozumowaniu, że pewnemu przyrostowi kąta odpowiada pewna zmiana funkcyi goniometrycznej, a tej ostatniej odpowiada znowu zmiana logarytmu.

Dużo przykładów takich funkcyi napotykamy również w fizyce. N. p. czas wahania wahadła jest funkcyą przyspieszenia ziemskiego g, a przyspieszenie g jest funkcyą szerokości geograficznej φ:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g = g_0 + \gamma \sin^2\varphi, \quad \text{czyli } t = \pi\sqrt{\frac{l}{g_0 + \gamma \sin^2\varphi}}.$$

Objętość sześcianu jest funkcyą długości krawędzi, a ta jest funkcyą temperatury.

Natężenie prądu jest funkcyą oporu: $i = \frac{V}{w}$, a opór jest funkcyą długości l i przekroju q przewodnika: $w = \rho \frac{l}{q}$.

Załamanie promienia świetlnego w pryzmacie jest funkcyą współczynnika załamania światła n, a n jest funkcyą długości fali światła λ, i t. d.

Zmienność takiej funkcyi złożonej można przystępnie wyjaśnić na pewnym szczególnym przykładzie.

Weźmy n. p. pod uwagę powierzchnię kwadratu o boku a, $P = a^2$, przyczem a jest funkcyą temperatury t:

$$a = a_0 + a_0 \alpha t.$$

Wtedy $$P = (a_0 + a_0 \alpha t)^2.$$

Chcąc oznaczyć stosunek przyrostu powierzchni do równoczesnego przyrostu temperatury, zważmy, że gdy temperatura t wzrośnie o Δt, bok a wzrośnie o Δa, a równocześnie powierzchnia wzrośnie o ΔP.

Otóż $$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta a} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta t}.$$

Przy obliczaniu $\frac{\Delta P}{\Delta a}$ zupełnie nie zwracamy uwagi na to, co jest powodem zmiany boku a, tylko na to, czy Δa dąży w miarę zmniejszania się Δt do granicy zero.

Dalej $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta a} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta t}$$

albo $$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{da} \cdot \frac{da}{dt}.$$

W naszym przykładzie: $\frac{dP}{da} = 2a$, $\frac{da}{dt} = a_0 \alpha$,

więc $$\frac{dP}{dt} = 2a \cdot a_0 \alpha = 2a_0 \alpha (a_0 + a_0 \alpha t).$$

Jeżeli w ten sposób przy każdym przykładzie będziemy takie rozważanie przeprowadzali, to zrozumienie zmienności funkcyi nie przedstawi trudności.

Przez to zyskujemy dużo przy zastosowaniu rachunku różniczkowego do rozwiązywania zagadnień praktycznych.

N. p. ruch prosty harmoniczny określamy wzorem:

$$s = a \sin \alpha t; \text{ zatem } \frac{ds}{dt} = a\alpha \cos \alpha t,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -a\alpha^2 \sin \alpha t = -\alpha^2 s.$$

Otrzymujemy więc natychmiast prawo tego ruchu, które w fizyce wyprowadzamy z wielkim trudem.

Szczególnie wdzięczne jest badanie funkcyi wykładniczej: $y = b^x$, i funkcyi logarytmicznej: $y = \log_b x$.

Ta ostatnia da się określić także wzorem: $x = b^y$, z czego wynika, że obrazy geometryczne obu funkcyi, wykładniczej i logarytmicznej dla tego samego b leżą symetrycznie względem dwusiecznej kąta utworzonego przez osie.

Bardzo ważną jest dyskusya tych funkcyi dla rozmaitych wartości b, w szczególności dla $b > 1$ i $b < 1$.

Potrzeba szukania pochodnej logarytmu wynika choćby z zagadnienia szukania poprawek logarytmu i potrzeby uzasadnienia reguły, że zmiany logarytmu można uważać za proporcyonalne do zmian liczby logarytmowanej.

Wyprowadzenie pochodnej logarytmu: $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \log e$,

opiera się na znajomości granicy: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, którą poznajemy przy nauce o wzorze potęgowym Newton'a.

Tu uzasadnia się także potrzebę użycia logarytmów o zasadzie e albo t. zw. logarytmów naturalnych.

Badanie zmienności funkcyi wykładniczej: $y = a^x$, sprowadza się do badania funkcyi logarytmicznej; gdyż

$$x = \log_a y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \log_a e, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \log_e a;$$

$$\text{stąd } \frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Dochodzimy więc w ten sposób do ciekawej funkcyi wykładniczej: $y = e^x$, której pochodna równa się samej funkcyi, w której więc miarą zmienności funkcyi jest każdoczesna wartość samej funkcyi.

Te wzory można zastosować przedewszystkiem do różniczkowania funkcyi log sin x, log cos x, log tg x, log ctg x, przez co dochodzimy do należytego zrozumienia zmienności logarytmów funkcyi goniometrycznych.

Arytmetycznem zastosowaniem powyższych badań byłoby badanie t. zw. organicznego oprocentowania, czyli wyrachowanie wartości końcowej kapitału w wypadku, jeżeli doliczanie odsetek do kapitału następuje w dowolnie małych odstępach czasu*).

O wiele ciekawszym przykładem jest przedstawienie ciśnienia powietrza jako funkcyi wysokości.

Jeżeli mianowicie ciśnienie w wysokości x jest b(x), to $b(x + \Delta x) = b(x) - \frac{\Delta x . s}{S} \cdot \frac{b(x)}{b_0}$, gdzie s i S przedstawia ciężar właściwy powietrza, względnie rtęci.

Zatem $b(x + \Delta x) = b(x) \left(1 - \frac{s}{b_0 S} \Delta x\right)$.

Niech $\frac{s}{b_0 S} = \alpha$,

wtedy $b(\Delta x) = b(0) \left(1 - \alpha\Delta x\right) = b_0 k$

$b(2\Delta x) = b_0 k^2$

. . . . . .

$b(n\Delta x) = b_0 k^n = b_0 \left(1 - \alpha\Delta x\right)^n$.

Połóżmy $n\Delta x = x$, a więc $n = \frac{x}{\Delta x}$, to otrzymamy

$$b(x) = b_0 \left[\left(1 - \alpha\Delta x\right)^{-\frac{1}{\alpha\Delta x}}\right]^{-\alpha x}$$

Wzór będzie tem dokładniejszy, im mniejsze Δx.

W granicy $b(x) = b_0 e^{-\alpha x} = b_0 \left[\frac{1}{e^\alpha}\right]^x = b_0 \varkappa^x$.

Z tego więc widzimy, że ciśnienie powietrza maleje ze wzrostem wysokości wedle funkcyi wykładniczej.

Tego wzoru można natychmiast użyć do wyrażenia x t. j. wysokości przy pomocy ciśnienia barometrycznego i w ten sposób otrzymujemy dokładną formułę barometryczną.

Badanie funkcyi cyklometrycznych t. j. kątów, pojmowanych w zależności od swoich funkcyi goniometrycznych, nie jest wprawdzie trudnem, ale w szkole średniej zbytecznem.

---

*) Höfler, Hilfsbuch z. Physik 1904 str. 737.

Przy wyprowadzaniu współczynników kierunkowych stycznych do krzywych drugiego stopnia możemy zapoznać się z różniczkowaniem funkcyi uwikłanej.

Gdy zatem mamy: $x^2 + y^2 = r^2$, napiszmy: $y^2 = r^2 - x^2$, i nie wyrażajmy samego y jako funkcyi x, tylko obie strony tej równości uważajmy za funkcye x; wolno nam tak zrobić, gdyż y a zatem i y^2 jest funkcyą x, a także $r^2 - x^2$ jest funkcyą x. Pochodne tych równych funkcyi muszą być równe.

Zatem $2y \frac{dy}{dx} = - 2x$

stąd $\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y}$.

Prawdziwość tego postępowania możemy potwierdzić przejściem do granicy stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ określonego równaniami:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 = r^2$$

$$2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 = 0, \text{ i t. d.}$$

Podobnie postąpić możemy przy innych krzywych drugiego rzędu, a więc elipsie, hiperboli i paraboli.

IV.

Rozwiązywanie równań metodą graficzną.

Nowe plany naukowe wprowadzają do pewnego stopnia jako nowość graficzną metodę rozwiązywania równań. Do tej intencyi planów zastosowane są najnowsze podręczniki algebry*), zawierające specyalne ustępy o rozwiązywaniu równań rozmaitych stopni przy pomocy rysunku. Metoda ta opiera się na następującej zasadzie: Gdy dane jest równanie o jednej niewiadomej: $f(x) = 0$, to lewa strona równania zawiera wielkość nieznaną x; możemy ją pojmować jako funkcyę x, przyjmującą dla rozmaitych x rozmaite wartości.

Rozwiązanie równania polega na wyszukaniu takiej wartości na x, dla której ta funkcya przyjmuje wartość 0. Chcąc taką wartość wyszukać, trzeba śledzić zmienność danej funkcyi. Przedstawiamy tedy funkcyę $f(x)$ graficznie krzywą, dla której współrzędne prostokątne dowolnego punktu czynią zadość równaniu: $y = f(x)$; wtedy odcięte punktów przecięcia obrazu funkcyi z osią x przedstawiają te wartości na x, dla których $y = f(x) = 0$, innemi słowami przedstawiają pierwiastki równania.

Wyznaczenie obrazu funkcyi opiera się na wyszukaniu dostatecznie dużej ilości punktów, przez które ten obraz ma przechodzić, i połączeniu ich odpowiednią linią ciągłą; dla dokładności rysunku posługujemy się papierem kratkowanym n. p. milimetrowym.

Ponieważ przy konstrukcyi obrazu funkcyi musimy zadowolić się wyszukaniem pewnej nieznacznej ilości punktów obrazu,

---

*) Dziwiński: Algebra 1910.
Mocnik-Zahradnicek: Algebra 1911.
Behrendsen - Götting: Lehrbuch der Mathematik 1909.

a przebieg obrazu między wyznaczonymi punktami obieramy dosyć dowolnie, przeto metoda graficzna jest zawsze tylko przybliżoną. Chcąc przecież osiągnąć przy niej pewną dokładność, musimy konstrukcyę obrazu poprzedzić odpowiedniem rozważaniem funkcyjnem.

Przy rozwiązywaniu równań pierwszego stopnia kształtu: $ax + b = 0$, należy badać zmienność funkcyi: $y = ax + b$. Można to uczynić na dość nizkim stopniu nauki bez specyalnych metod; mianowicie łatwo wyznaczyć obraz geometryczny funkcyi: $y = x$, podobnie obraz funkcyi: $y = ax$; przez przesunięcie zaś tych obrazów otrzymujemy obraz funkcyi: $y = ax + b$, który tedy jest linią prostą. Wiedząc o tem możemy tę prostą wykreślić, obierając 2 dowolne wartości na x i szukając odpowiadających im wartości y.

Jeżeli równanie pierwszego stopnia dane we formie

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2$$

to zamiast sprowadzać je do kształtu: $f(x) = 0$, można rozpatrywać 2 funkcye: $y_1 = a_1x + b_1$ i $y_2 = a_2x + b_2$, które mają jako obrazy proste; dla odciętej ξ punktu przecięcia tych prostych obie funkcye przyjmują tę samą wartość; zatem otrzymujemy

$$a_1\xi + b_1 = a_2\xi + b_2.$$

Szczególnie ciekawem zastosowaniem tej metody jest rozwiązywanie zagadnień z ruchu jednostajnego, dotyczących spotkania się 2 punktów poruszających się wzdłuż tej samej drogi, a zwłaszcza układanie i odczytywanie planów kolejowych*). Ze skutkiem można zastosować tę metodę także przy zagadnieniach z reguły trzech, przy rachunku mieszaniny, podziału proporcyonalnego, średniego terminu i t. d.

Nie ulega jednak wątpliwości, że pod względem wartości kształcącej daleko korzystniejszem jest posługiwanie się przy rozwiązywaniu takich równań metodą algebraiczną; metoda graficzna, rozwijająca więcej zmysł praktyczny, zastosowana pobieżnie może łatwo doprowadzić do zmechanizowania nauki, a nadto daje w tym wypadku wynik niedokładny, podczas gdy metoda algebraiczna w dziedzinie równań pierwszego stopnia daje bez rudu wyniki zupełnie dokładne.

---

*) Por. Behrendsen - Götting, l. c. str. 196—201

Szukanie pierwiastków 2 równań pierwszego stopnia kształtu: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, przy pomocy rysunku polega na konstrukcyi 2 prostych jako obrazów tych równań i na wyznaczeniu współrzędnych ich punktu przecięcia. Uzasadnienie tej konstrukcyi jednak wymaga zrozumienia twierdzenia geometryi analitycznej, że każdemu równaniu o 2 niewiadomych odpowiada jako obraz geometryczny linia i że współrzędne punktu przecięcia 2 obrazów sprawdzają równania obu obrazów. Rozwiązanie algebraiczne jest tem bardziej wskazane, że prędzej prowadzi do celu i że tu chodzi tylko o pierwiastki, a funkcyjna zależność x i y jest obojętna.

Rozwiązywanie graficzne równania kwadratowego kształtu ogólnego: $x^2 + px + q = 0$, wymaga wykreślenia obrazu funkcyi $y = x^2 + px + q$, i znalezienia punktów przecięcia tego obrazu z osią 0x. Należyte zrozumienie przebiegu krzywej można osiągnąć już to metodą czysto geometryczną, już to przez zastosowanie pojęcia pochodnej.

Pierwsza metoda polega na tem, że wychodzimy*) od najprostszej funkcyi: $y = x^2$, której obraz geometryczny jest parabolą; przebieg tej paraboli**) łatwo ocenić choćby z tego względu, że spotykamy się z nią przy rzucie poziomym (mianowicie gdy kwadrat prędkości rzutu równa się połowie przyspieszenia ziemskiego); jest ona przedewszystkiem symetryczną ze względu na oś 0y i w miarę wzrostu odciętej wznosi się coraz stromiej w górę; nieznaczna ilość punktów wystarcza do dosyć dokładnego nakreślenia tej paraboli.

Gdy każdy punkt tej paraboli przesuniemy równolegle do osi 0y o odcinek b, n. p. $b = 2$, wtedy otrzymamy znowu taką samą parabolę, tylko przesuniętą; jeżeli rzędną dowolnego punktu pierwszej paraboli P oznaczymy przez y, to odpowiednia rzędna y_1, w drugiej paraboli P_1, wynosi ogólnie $y + b$, w naszym wypadku $y + 2$; zatem $y_1 = y + 2$, albo $y_1 = x^2 + 2$, ogólnie $y_1 = x^2 + b$.

I na odwrót obrazem funkcyi: $y_1 = x^2 + b$, jest parabola kształtu P przesunięta równolegle do osi 0y o b; do dowodu wystarczy każdy punkt paraboli P_1 przesunąć o długość b ku osi 0x.

---

*) Behrendsen-Götting, l. c. str. 239—249.

**) Patrz figura 7. tablic.

Z tego wynika, że równanie kształtu: $x^2 + b = 0$ ma 2 pierwiastki o równej wielkości, a o przeciwnym znaku, gdy $b < 0$, a niema żadnego pierwiastka rzeczywistego, gdy $b > 0$. Urojonych pierwiastków metoda graficzna nie jest w stanie wykryć.

Jeżeli dalej każdy punkt paraboli P przesuniemy o długość a (n. p. $a = 3$) równolegle do osi 0x, wtedy odcięta x_1 każdego punktu paraboli P_2 będzie od odpowiedniej odciętej paraboli P większą o a; zatem $x_1 = x + 3$, $x = x_1 - 3$, a równanie tej paraboli jest: $y = (x_1 - 3)^2$, ogólnie: $y = (x_1 - a)^2$.

I na odwrót dowolna funkcya tego kształtu przedstawia parabolę w położeniu P_2.

Gdy wreszcie wykonamy na paraboli P po kolei obydwa przesunięcia, to współrzędne punktu $(x_1 y)$ danej paraboli zamienią się na: $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$, a między nimi będzie zachodził związek: $y_1 = (x_1 - a)^2 + b$.

A zatem i równanie kształtu: $y = (x - a)^2 + b$ przedstawia parabolę P w położeniu P_3, do którego możemy dojść przesuwając parabolę P o odcinek a równolegle do osi 0x, a o odcinek b równolegle do osi 0y. Rzeczywiste pierwiastki otrzymamy tylko wtedy, gdy $b < 0$.

Mając równanie ogólne: $x^2 + px + q = 0$, i odpowiadającą mu funkcyę: $y = x^2 + px + q$, sprowadzamy ją do kształtu poprzedniego: $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

N. p. gdy $y = x^2 + 3x + 2$, to po przekształceniu

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \frac{9}{4}.$$

Zatem $b = -\frac{1}{4}$; istnieją więc 2 pierwiastki rzeczywiste leżące symetrycznie względem punktu na osi 0x o odciętej $a = -\frac{3}{2}$. Dokładną ich wartość otrzymamy, szukając punktów paraboli*) dla $x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$; pokazuje

*) Patrz fig. 8 tablic.

się w tym wypadku, że to są właśnie pierwiastki równania $x^2 + 3x + 2 = 0$, mianowicie $x_1 = -1$, $x_2 = -2$.

Ta metoda doprowadza nas do wyniku, że równanie: $x^2 + px + q = 0$, ma 2 różne pierwiastki rzeczywiste tylko wtedy, gdy $\frac{p^2}{4} - q > 0$; gdy $\frac{p^2}{4} - q < 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych; gdy $\frac{p^2}{4} - q = 0$, istnieje tylko jeden albo 2 równe pierwiastki rzeczywiste.

W wypadku, gdy $q = 0$, to $b = -\frac{p^2}{4}$, $a = -\frac{p}{2}$, zatem pierwiastkiem jednym jest $x_1 = 0$, drugim $x_2 = -p$.

Pewnem ułatwieniem tej metody, które zwłaszcza przy równaniach wyższych stopni odgrywa ważną rolę, jest następujące rozumowanie*):

Gdy $x^2 + px + q = 0$, to $x^2 = -px - q$.

Lewą i prawą stronę tej równości można uważać jako 2 funkcye x: $y_1 = x^2$, $y_2 = -px - q$, którym odpowiadają 2 obrazy geometryczne. Dla odciętej ξ punktu przecięcia tych obrazów, które łatwo wykreślić: $y_1 = y_2$, zatem $\xi^2 = -p\xi - q$; czyli odcięta ξ jest pierwiastkiem danego równania.

W wypadku: $x^2 + 3x + 2 = 0$, prowadzi ta metoda natychmiast do wyniku powyżej otrzymanego**).

Drugą metodą graficzną jest kreślenie przebiegu krzywej będącej obrazem funkcyi: $y = x^2 + px + q$, przy pomocy algebraicznego badania zmienności funkcyi. Ta metoda, którą zwykle stosujemy i przy graficznem rozwiązywaniu równań wyższych stopni, pozostaje w ścisłym związku z rachunkiem różniczkowym a w szczególności z teoryą maximów i minimów funkcyi.

Mianowicie dla konstrukcyi obrazu jest rzeczą bardzo ważną ocenienie, czy w pewnym odstępie krzywa się wznosi, czy się obniża, a więc czy wartość y przy ciągłem wzrastaniu x rośnie, czy maleje. Jeżeli przy wzroście x od pewnej wartości krzywa się wznosi, a więc y rośnie, to wartość pochodnej $\frac{dy}{dx}$ dla tej war-

---

*) Mocnik - Zahradnicek, l. c. str. 146.

**) Patrz fig. 8. tablic.

tości x jest dodatnią, gdyż stosunek różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest dodatni; w przeciwnym wypadku $\frac{dy}{dx}$ jako granica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest ujemne.

I na odwrót z wartości pochodnej można w ten sam sposób wywnioskować, czy krzywa od pewnego x począwszy w najbliższem jego otoczeniu wznosi się, czy się obniża*). W wypadku, gdy pochodna $\frac{dy}{dx}$ dla pewnego x jest równa zeru, nie możemy rozstrzygnąć na podstawie wzoru: $\frac{dy}{dx} = 0$, czy krzywa od tego punktu wznosi się, czy obniża; to tylko wiemy, że styczna do krzywej w takim punkcie jest równoległa do osi ox. Chcąc zrozumieć, jaki przebieg ma krzywa w otoczeniu takiego punktu, należy zbadać wartości pochodnej w najbliższem otoczeniu tego punktu.

Gdy do tego punktu $\frac{dy}{dx}$ jest dodatnie, a od tego punktu ujemne, wtedy krzywa ma w danym punkcie największe wzniesienie „maximum“, gdy rzecz ma się przeciwnie, wtedy mamy do czynienia z „minimum“. Jeżeli $\frac{dy}{dx}$ jest i przed takim punktem i po nim dodatnie, względnie ujemne, krzywa ma w tym punkcie przegięcie polegające na tem, że do tego punktu krzywa zwraca do osi ox stronę wklęsłą, a od tego punktu stronę wypukłą, albo przeciwnie.

Wciągnięcie do rozumowania dalszych pochodnych jest łatwe do przeprowadzenia, jeżeli pierwszą pochodną jako funkcyę x przedstawi się geometrycznie; wtedy n. p. ze znikania drugiej pochodnej $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ w pewnym punkcie wywnioskujemy, że nachylenie pierwotnej krzywej do tego punktu rośnie a od tego punktu maleje albo przeciwnie, a więc, że krzywa pierwotna ma w tym punkcie punkt przegięcia, w którym jednak nachylenie stycznej w ogólnym wypadku jest różne od 0.

**) Mocnik - Zahradnicek, l. c. 175.

Mając tedy funkcyę: $y = x^2 + px + q$, tworzymy pochodną $\frac{dy}{dx} = 2x + p$. Pochodna znika dla $x = -\frac{p}{2}$, do tego punktu pochodna jest ujemną, od tego punktu dodatnią, krzywa więc ma w tym punkcie minimum.

Pierwiastki rzeczywiste będą istniały, gdy to minimum $y_{min} = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = -\frac{p^2}{4} + q$ jest ujemne albo $\frac{p^2}{4} - q$ jest dodatnie.

Przebieg całej krzywej łatwo ocenić, gdyż od minimum w jedną i drugą stronę nachylenie krzywej rośnie podług wzoru:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + p.$$

To wynika także stąd, że $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, a więc krzywa nie ma nigdzie punktów przegięcia.

Analogicznie należy postępować przy równaniach wyższych stopni o jednej niewiadomej, przy czem druga pochodna odgrywa przy konstrukcyi obrazu wybitną rolę.

Zgodność rezultatów otrzymanych metodą graficzną i algebraiczną można łatwo stwierdzać przy równaniach odwrotnych trzeciego, czwartego i piątego stopnia.

Rozwiązywanie systemu 2 równań, z których przynajmniej jedno jest kwadratowe, wymaga konstrukcyi trudniejszych, mianowicie wchodzi ono w wybitnym stopniu w zakres geometryi analitycznej i jest możliwe z korzyścią dopiero na najwyższym stopniu nauki.

Chcąc należycie ocenić znaczenie metody graficznej przy rozwiązywaniu równań musimy zwrócić uwagę na to, że metoda ta stosowana wcześnie musi się obejść bez pomocy pojęcia pochodnych, a przez to dość dokładne konstrukcye, możliwe chyba przy równaniach kwadratowych, przy równaniach wyższych stopni daje metoda mimo uciążliwych rachunków wyniki dość niedokładne; w ogóle zupełnie dokładnych wyników tą metodą otrzymać nie możemy, co już leży w naturze rzeczy; wreszcie co najważniejsza, otrzymać możemy za pomocą tej metody tylko rozwiązania rzeczywiste.

Nie ma więc nawet mowy o porównaniu wartości tej metody rozwiązywania równań z wartością metod algebraicznych.

Znaczenie metody graficznej leży w przygotowaniu umysłu ucznia do rozważań, jakiemi posługujemy się w geometryi analitycznej, a zwłaszcza, ale to na najwyższym stopniu nauki, w ułatwieniu zrozumienia związku, jaki zachodzi między badaniem zmienności funkcyi ogólnych stopnia drugiego, trzeciego, czwartego i piątego, dalej funkcyi wykładniczej, logarytmicznej i goniometrycznych i rozwiązywaniem równań z tych funkcyi utworzonych.

ZAKOŃCZENIE.

Granice, do których można się posunąć w nauce o funkcyach w szkole średniej, nie są wprawdzie dokładnie nowym planem zakreślone, ale pewne wskazówki w tej sprawie daje nam wzmianka planów, że początkowe zasady różniczkowania i całkowania powinno się podać uczniom w klasie najwyższej w formie zastosowań do znanego materyału nauki.

Otóż zagadnienia o maximach i minimach funkcyi należałoby wciągnąć w zakres nauki wobec tego, że one pobudzają do myślenia i zaciekawiają wogóle, a ponadto znajdują wybitne zastosowanie w geometryi i we fizyce.

Z przykładów geometrycznych należą do najwięcej interesujących: zbadanie, który z prostokątów lub trójkątów równoramiennych o danym obwodzie ma największą powierzchnię, który z walców lub stożków prostych o danej powierzchni ma największą objętość, która z figur (brył) pewnego rodzaju wpisanych w figurę (bryłę) drugiego rodzaju ma największą powierzchnię, względnie objętość.

Z fizycznych przykładów zasługują na uwagę:

1. Połączenie n ogniw w p szeregów po q ogniw równoległych tak, żeby natężenie prądu było największe*).

2. Pokazanie, że prawo odbicia i załamania promienia świetlnego jest równoważne z faktem, że droga przebieżona przez promień między dwoma punktami w pewnym czasie jest dla biegu określonego temi prawami najkrótszą.

---

*) Düsing, Elemente d. Differential u. Integralrechnung 1908.

3. Wyjaśnienie tęczy przy pomocy minimum odchylenia promienia świetlnego w kropli wody. To odchylenie wynosi:

$$D = 4\gamma - 2\alpha, \text{ gdzie } \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n.$$

Warunek: $\frac{dD}{d\alpha} = 0$, prowadzi do wyniku*), że

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$; stąd dla $n = 1{\cdot}33$ (czerwony) $D = 42^0 30'$

$n = 1{\cdot}344$ (fioletowy) $D = 40^0 20'$.

4. Pokazanie, że promień świetlny doznaje minimum odchylenia w pryzmacie przy przejściu symetrycznem przez pryzmat. Tu odchylenie wynosi: $D = \alpha + \delta - A$, przyczem $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{1}{n}$, $\beta + \gamma = A$, gdzie α, β, γ, δ są kolejnymi kątami padania i załamania, a A jest kątem łamiącym pryzmatu. Warunek dla minimum: $\frac{dD}{d\alpha} = 0$ prowadzi do: $\frac{d\delta}{d\alpha} = -1$, z równości zaś $\beta + \gamma = A$ wynika $\frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$, albo $\frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{d\beta}{d\alpha}$.

Jeżeli te wartości wstawimy w zróżniczkowane wzory: $\sin\alpha = n\sin\beta$ i $\sin\delta = n\sin\gamma$, otrzymujemy równość: $\cos\alpha\cos\gamma = \cos\beta\cos\delta$, która z równością otrzymaną z wzorów na załamanie: $\sin\alpha\sin\gamma = \sin\beta\sin\delta$, daje: $\alpha + \gamma = \delta + \beta$, $\alpha - \gamma = \delta - \beta$; zatem $\alpha = \delta$.

Drugiem zagadnieniem, które możnaby jeszcze traktować w szkole średniej, ale tylko w najkorzystniejszych warunkach jest zagadnienie o promieniu krzywizny; jeżeli ten promień R określimy jako granicę, do której dąży odległość pewnego punktu M krzywej od punktu przecięcia się 0 normalnej w tym punkcie ze symetralną cięciwy, łączącej dany punkt z punktem sąsiednim M', gdy punkt M' zbliża się coraz bardziej do M, to promień ten przynajmniej dla szczególnych krzywych i w szczególnych punktach n. p. wierzchołku paraboli**), elipsy lub hiperboli można będzie dość łatwo analitycznie wyprowadzić.

Zależność promienia krzywimy od wartości drugiej pochodnej w danym punkcie można bez trudu i w ogólnym wypadku

---

*) Höfler: Hilfsbuch str. 951, 952.

**) Höfler: Hilfsbuch str. 764.

uzmysłowić. Lecz zawsze wystrzegać się należy formalistycznego sposobu pojmowania, że koło krzywizny jest kołem przechodzącem przez 3 nieskończenie blizkie punkty krzywej.

Plan przewiduje wprowadzenie początków rachunku całkowego do nauki szkolnej.

Ponieważ chodzi tu głównie o wypadki całkowania przy szukaniu powierzchni elipsy i odcinka paraboli, przeto jedynie odpowiednią rzeczą będzie zacząć naukę całkowania od pojęcia całki określonej.

Wskazanem n. p. zacząć od przejścia granicznego przy obliczaniu powierzchni koła przez rozkład koła na dostateczną ilość bardzo małych wycinków; znacząc powierzchnię trójkąta przynależnego do wycinka przez Δp, otrzymujemy wielkość powierzchni koła P jako granicę, do której dąży suma:

$\Delta p_1 + \Delta p_2 + \cdots + \Delta p_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{r=1}^{r=n} \Delta p_r$, gdy ilość boków wieloboku wpisanego w koło rośnie bez granic. Tu wprowadzamy symbol: $P = \int dp$. Że powierzchnia wieloboku wpisanego w koło zbliża się rzeczywiście dowolnie do powierzchni koła, należy wyjaśnić przez równoczesne rozważanie wieloboku opisanego na kole.

Rozumowanie, że „jeżeli wezmę łuczek nieskończenie mały, to i wycinki nieskończenie mało będą się różniły od trójkątów, temsamem powierzchnia wieloboku umiarowego przejdzie w powierzchnię koła“*) zawiera tę samą nieścisłość, jaką wykazaliśmy w określeniu stycznej, jako prostej łączącej 2 nieskończenie blizkie punkty krzywej.

Określenie całki określonej podług wzoru:

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_r \to 0} \sum_{x_r = a}^{x_r = b} y_r\, \Delta x_r$$

jest łatwo zrozumiałe zwłaszcza przy użyciu uzmysłowienia geometrycznego i rozpatrywaniu powierzchni zawartej między krzywą, osią 0x i rzędnemi punktów $x = a$ i $x = b$ w porównaniu ze sumą powierzchni prostokątów elementarnych wpisanych, względnie opisanych na krzywej.

---

*) Sadowski: Nauka o funkcyach w matematyce gimnazyalnej. Sprawozdanie c. k. gimnazyum w Tarnopolu 1910.

Dobrze obliczyć taką granicę w szczególnych wypadkach: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, bez pojęcia funkcyi pierwotnej za pomocą szukania sum:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n,\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.\text{*)}$$

Później dopiero wskazanem jest wykazać przez rozpatrywanie zmiany powierzchni, odpowiadającej bardzo małej zmianie odciętej x, że powierzchnia określona całką $P = \int_a^x f(x)dx = F(x)$ ma tę własność, iż $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Funkcyę $F(x)$ z tego powodu nazywamy pierwotną i znaczymy ją ogólnie: $F(x) = \int f(x)dx$; tu można wskazać na odwrotność obu działań, różniczkowania i całkowania w pojęciu szukania funkcyi pierwotnej. Wykazawszy, że funkcyi pierwotnych danej funkcyi $f(x)$ jest bardzo wiele, możemy łatwo wyprowadzić związek między całką określoną a nieokreśloną:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdzie $F(x)$ jest dowolną funkcyą pierwotną funkcyi $f(x)$.

Z zastosowania rachunku całkowego wskazanem jest wziąść obliczanie powierzchni elipsy, odcinka paraboli, sinusoidy, dalej całki: $\int_1^x \frac{1}{x} dx = \log x$, co może posłużyć do uzmysłowienia logarytmu przy pomocy powierzchni,

$\int_x^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x}$, co należy zastosować do obliczenia potencyału elektrycznego.

Wyprowadzenie twierdzenia, że objętość brył obrotowych, powstałych wskutek obrotu krzywej: $y = f(x)$, dokoła osi $0x$, przedstawia się wzorem:

$$V = \lim_{\Delta x_r \to 0} \sum_{x_r = a}^{x_r = b} y_r^2 \pi \Delta x_r = \int_a^b y^2 \pi dx$$

i zastosowanie tego twierdzenia do obliczenia objętości kuli i jej

---

*) Hoborski i Wilk, l. c. str. 125—138.

części, elipsoidy i paraboloidy obrotowej nie nastręcza wielkich trudności.

Uzasadnienie twierdzenia Cavalieri'ego nabiera przy użyciu rachunku całkowego należytej jasności. Wyrazi się ono w formie, że jeżeli: $f(x) = F(x)$, to także

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x} F(x)dx^{*)}.$$

Z przykładów fizycznych nadają się jako najstosowniejsze obliczenia środka mas łuku, wycinka i odcinka koła, wycinka i odcinka kuli i momentu bezwładności prostej i krążka dokoła osi prostopadłych do nich w środku.

Kwestya rozwinięcia funkcyi w szereg nieskończony w szkole średniej jest, o ile sądzę. w obecnym stanie nauki przedwczesną.

W jakim zakresie można będzie poruszone kwestye traktować w nauce szkolnej, nie da się zupełnie ściśle określić; w każdym razie najlepszym drogowskazem będzie uwaga planów, że zasady rachunku różniczkowego i całkowego nie powinny nigdy być dla uczniów obciążeniem, owszem uproszczeniem wymagań dotychczasowych.

Kończąc tę rozprawkę, uważam za swój miły obowiązek złożyć szczere podziękowanie J. Wielmożnemu P. Radcy rządu dyrektorowi Franciszkowi Nowosielskiemu za cenne uwagi rzeczowe, a Wielmożnemu P. profesorowi Dr. Eugeniuszowi Kucharskiemu za uwagi językowe, jakich raczyli mi udzielić w czasie pisania tej rozprawki.

W Stanisławowie, dnia 20. VI. 1911.

---

*) Höfler, Didaktik str. 294.

Fig. 1.

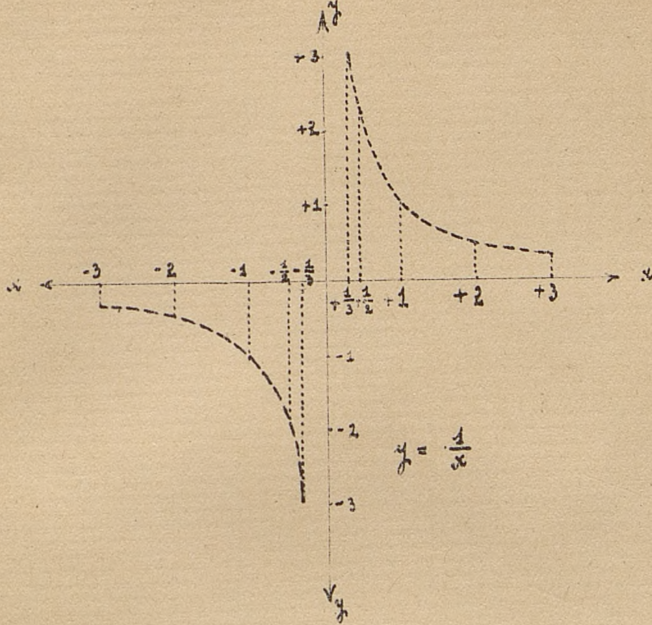


Fig. 2.

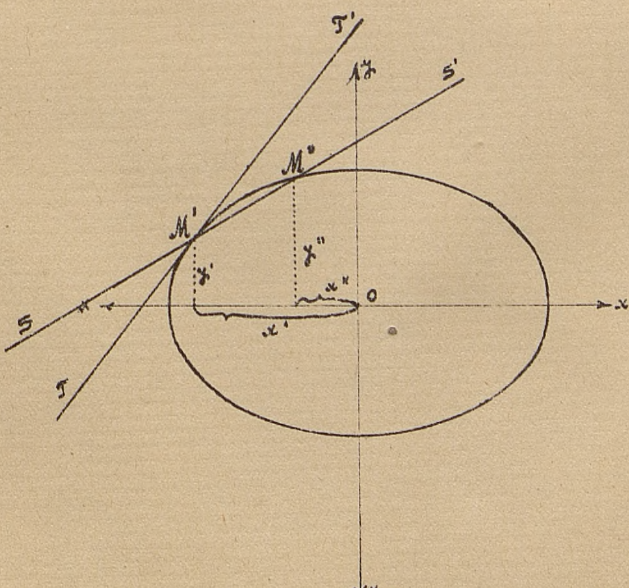


Fig. 3.

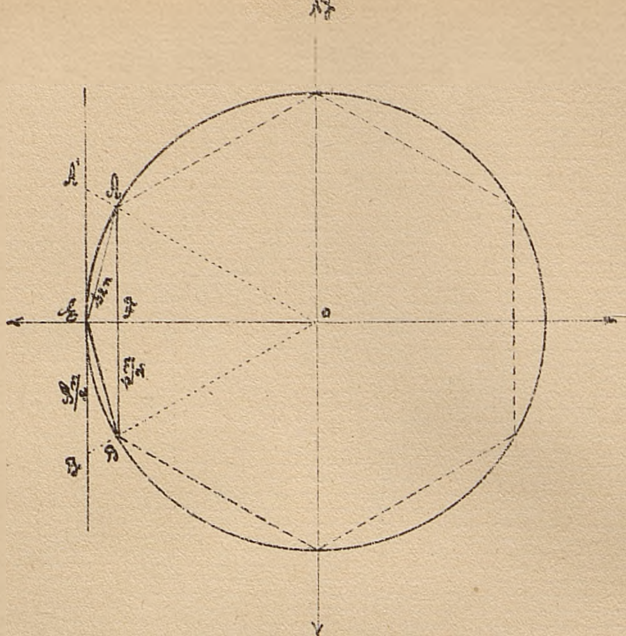


Fig. 4.

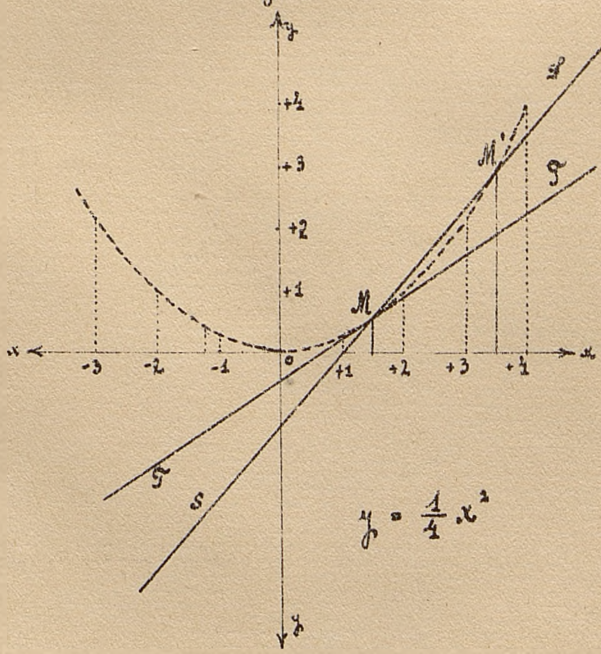
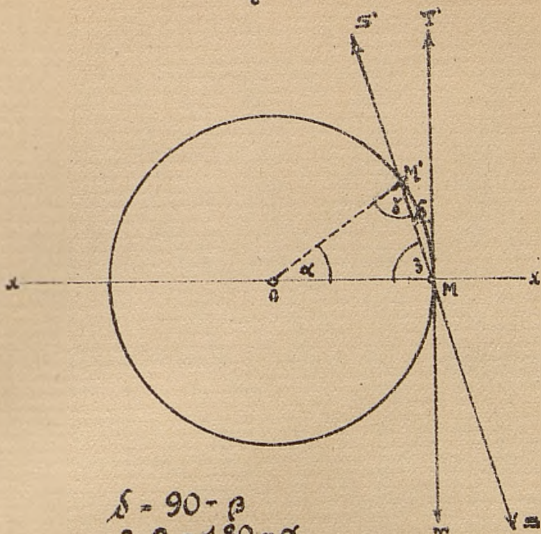
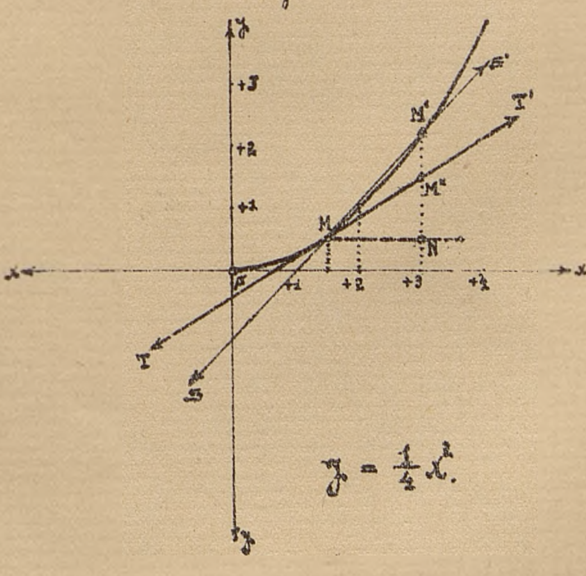


Fig: 5.



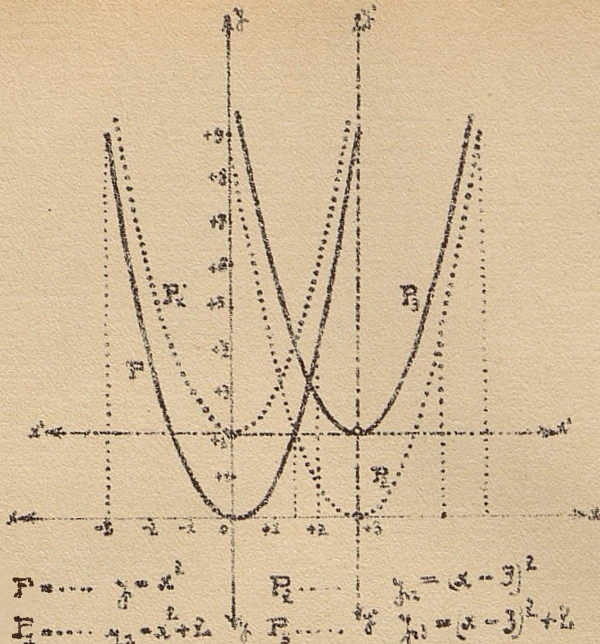
$$\delta = 90 - \beta$$
$$2\beta = 180 - \alpha$$
$$\beta = 90 - \frac{\alpha}{2}$$
$$\delta = \frac{\alpha}{2}$$

Fig. 6.



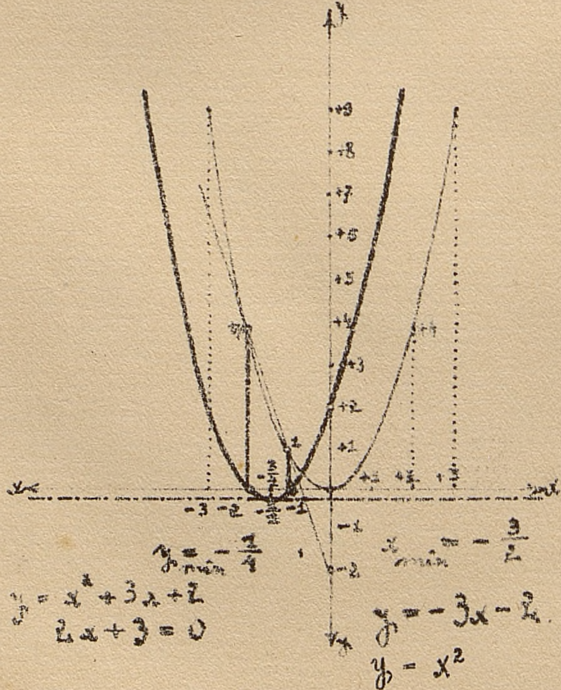
$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Fig. 7.



P ..... y = x²
P₁ ..... y₁ = x² + 2
P₂ ..... y₂ = (x − 3)²
P₃ ..... y₃ = (x − 3)² + 2

Fig. 8.



y_min = − 1/4
x_min = − 3/2
y = x² + 3x + 2
2x + 3 = 0
y = − 3x − 2
y = x²

Część urzędowa.

Skład grona nauczycielskiego z końcem roku szkolnego 1911.

1. **Nowosielski Franciszek**, Radca rządu, c. k. dyrektor VI. rangi, uczył w 2 półr. matematyki w kl. VIa 4 godziny tygodniowo.
2. **Bryliński Ludwik**, c. k. profesor VIII. rangi, zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył historyi naturalnej w kl.: Ia_2, Ib_2, IIa_2, IIb_2, Va_2, Vb_2, VIa_2, VIb_2, $VIIa_2$, $VIIb_2$, razem tygodniowo 20 godzin.
3. **Cehak Adam**, c. k. profesor VIII. rangi, gosp. kl. IIb, uczył matematyki w kl.: IIa_3, IIb_3, $IIIa_3$, $IIIb_3$; geometryi w kl.: IIa_2, IIb_2, $IIIa_2$, $IIIb_2$, razem 20 godzin tygodniowo.
4. **Erdstein Nuchim**, zastępca naucz. religii mojżesz., uczył w 1. półroczu religii mojż. w kl. I.—VIII. razem 14 godzin: w drugiem półroczu religii mojżeszowej w kl. I.—VII. i fizyki w kl: $IIIa_3$, $IIIb_3$, razem tygodniowo 20 godzin.
5. **Feliński Gerard**, c. k. nauczyciel, gosp. kl. IIIb, uczył języka polskiego w kl.: IIb_4, $IIIb_3$, Vb_4, VIa_3, VIb_3, historyi IIb_2, $IIIb_2$, razem tygodniowo 21 godzin.
6. **Frenkel Joachim**, dr. fil., c. k. profesor, gosp. kl. VIIb, uczył języka niemieckiego w kl.: IVb_4, Vb_4, VIb_3, $VIIa_3$, $VIIb_3$, razem tygodniowo 17 godzin.
7. **Grondalczyk Jan**, egz. zast. naucz., zawiadowca gabinetu rysunkowego, uczył rysunków odręcznych w kl.: IIb_4, $IIIa_4$, IVb_3, Va_3, Vb_3, VIa_2, VIb_2, $VIIa_2$, $VIIb_2$, razem tygodniowo 25 godzin.
8. **Hrycak Teodor**, c. k. profesor, zawiadowca gabinetu fizyki, gosp. kl. VIIa, uczył w pierwszem półroczu fizyki w kl.: IVa_2, VIa_4, VIb_4, $VIIa_4$, $VIIb_4$, matematyki w kl.: $VIIa_5$, razem tygodniowo 23 godzin; w drugiem półroczu uczył fizyki w kl.: IVa_2, VIa_4, VIb_4, $VIIa_4$, $VIIb_4$, matematyki w kl. $VIIa_5$, $VIIb_5$, razem tygodniowo 24 godzin.

9. **Kleczewski Mieczysław**, egz. zast. nauczyciela, uczył rysunków odręcznych w kl.: Ia_4, Ib_4, IIa_4, $IIIb_4$, IVa_3, kaligrafii Ia_2, Ib_2, razem tygodniowo 23 godzin.
10. **Kucharski Eugeniusz**, dr. filoz., c. k. nauczyciel, zawiadowca biblioteki nauczycielskiej, gosp. kl. Va, uczył języka polskiego w kl.: IVb_3, Va_4, $VIIa_4$, $VIIb_4$; języka francuskiego w kl. IVb_3, razem tygodniowo 18 godzin.
11. **Ks. Litwin Józef**, zast. nauczyciela, gosp. kl. Ia, uczył języka niemieckiego w kl.: Ia_6, $IIIa_5$, języka ruskiego $IIab_2$ i w jednym oddziale 2 godz., razem tygodniowo 15 godzin.
12. **Ks. Nogaj Andrzej**, c. k. profesor, katecheta obrz. rzym. kat., uczył religii w kl.: I.—VII. razem tygodniowo 14 godzin.
13. **Paszkiewicz Aleksander**, c. k. nauczyciel, gosp. kl. Vb, uczył języka francuskiego w kl.: $IIIb_4$, IVa_3, Vb_3, VIa_3, VIb_3; języka polskiego w kl. IVa_3, języka ruskiego w kl. Iab_2, i w jednym oddziale 2 godz., razem tygodniowo 23 godzin.
14. **Procyk Andrzej**, c. k. profesor VIII. rangi, gosp. kl. VIa, zawiadowca biblioteki niemieckiej uczniów, uczył języka niemieckiego w kl.: $IIIb_5$, IVa_4, Va_4, VIa_3; języka ruskiego w kl. $IIIab_2$, razem tygodniowo 18 godzin.
15. **Pudełko Edmund**, egz. zast. naucz., gosp. kl. IIIa, uczył historyi powszechnej w kl.: IVa_2, Va_3, VIa_2; geografii w kl.: Ib_2, IIa_2, IIb_2, $IIIa_2$, $IIIb_2$, IVa_2, razem tygodniowo 19 godzin.
16. **Raciborski Tadeusz**, c. k. nauczyciel, gosp. kl. IVb, zawiadowca środków naukowych historyi i geografii, uczył historyi powszechnej w kl.: IVb_2, Vb_3, VIb_2, $VIIa_4$, $VIIb_4$; geografii IVb_2, Va_1, VIb_1, razem tygodniowo 19 godzin.
17. **Rogus Stanisław**, c. k. profesor, gosp. kl. IVa, uczył w pierwszem półroczu matematyki w kl.: IVa_4, IVb_4, Va_4, Vb_4; geometryi w kl.: IVa_2, IVb_2, razem tygodniowo 20 godzin, w drugiem półroczu matematyki w kl.: IVa_4, IVb_4, Va_4, Vb_4, VIb_4; geometryi w kl.: IVa_2, IVb_2, razem tygodniowo 24 godzin, (do służby w tutejszym zakładzie przydzielony ze szkoły realnej w Śniatynie).
18. **Ruxer Stanisław**, c. k. profesor, gosp. kl. VIb, w 1. półroczu uczył matematyki w kl.: VIa_4, VIb_4, $VIIb_5$; fizyki w kl. $IIIa_3$, $IIIb_3$, IVb_2, razem tygodniowo 21 godzin; w drugiem półroczu urlopowany.
19. **Ks. Senyszyn Jan**, zast. nauczyciela, katecheta obrz. gr. kat. uczył religii w kl. I.—VII. razem tygodniowo 14 godzin.

20. **Szymański Zygmunt**, c. k. profesor, dr. filozofii, zawiadowca biblioteki francuskiej uczniów, uczył języka francuskiego w kl.: $IIIa_4$, Va_3, $VIIa_3$, $VIIb_3$; języka polskiego w kl. Ib_3, historyi w kl. Ib_2, razem tygodniowo 18 godzin.
21. **Świątkiewicz Włodzimierz**, c. k. nauczyciel w IX. randze, uczył gimnastyki w kl.: I.—VII. razem tygodniowo 26 godzin.
22. **Urban Piotr**, zast. nauczyciela urlopowany na cały rok szkolny.
23. **Westwalewicz Maryan**, c. k. profesor VIII. rangi, zawiadowca gabinetu chemii, gosp. kl. VIb (w drugiem półroczu), uczył chemii w kl.: IVa_3, IVb_3, Va_2, Vb_2, VIa_2, VIb_2; geografii w kl. VIa_1, VIb_1; prowadził laboratoryum chemiczne w kl.: Vab_4, $VIab_4$, razem tygodniowo 24 godzin.
24. **Wieleżyński Aleksander**, c. k. profesor, inż., zawiad. gabinetu geometryi wykreślnej i biblioteki uczniów, uczył w pierwszem półroczu geometryi wykr. w kl.: Va_3, Vb_3, VIa_3, VIb_3, $VIIa_2$, $VIIb_2$, matematyki w kl.: Ia_3, Ib_3, w drugiem półroczu prócz powyższych godzin uczył fizyki w kl. IVb_3, razem tygodniowo 24 godzin.
25. **Wojtas Jan**, egz. zast. nauczyciela, gospodarz kl. Ib, uczył języka niemieckiego w kl.: Ib_6, IIa_6, IIb_6, razem tygodniowo 18 godzin.
26. **Wolański Edmund**, zastępca naucz., gosp. kl. IIa, uczył języka polskiego w kl.: Ia_3, IIa_4, $IIIa_3$; historyi powszechnej w kl.: Ia_2, IIa_2, $IIIa_2$; geografii w kl. Ia_2, razem tygodniowo 18 godzin.

Nauczyciele poboczni.

1. **Erdstein Nuchim**, zast. naucz., uczył stenografii w dwu od działach w 4 godzinach tygodniowo.
2. **Gajkowski Stanisław**, nauczyciel szkoły ludowej, udzielał nauki śpiewu w dwu oddziałach w 4 godzinach tygodniowo.
3. **Henryk Cervenzl**, ksiądz ewangelicki, uczył religii ewangelickiej w 4 godzinach tygodniowo.

Zmiany w gronie nauczycielskiem w ciągu roku szk. 1910/11.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 30. sierpnia 1910 l. 46863, uwiadamia, że Pan Minister Wyz. i Ośw. reskryptem z dnia 2. lipca 1910 l. 26075 posunął Adama Cehaka i Maryana Westwalewicza, profesorów tut. szkoły realnej do VIII. klasy rang

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 12. września 1910 l. 52212 przydzieliła profesora Stanisława Matzkiego do c. k. gimnazyum VIII. we Lwowie.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 12. września 1910 l. 52211 zamianowała egzaminowanego asystenta rysunków Mieczysława Kleczewskiego zastępcą nauczyciela w tutejszej szkole realnej.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 24. września 1910 l. 57308 przydzieliła Stanisława Rogusa, profesora szkoły realnej w Śniatynie, do służby w tutejszej szkole realnej.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 24. września 1910 l. 57309, przeniosła Nussbauma Józefa, egz. zastępcę naucz., w tym samym charakterze do szkoły realnej w Śniatynie.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 25. września 1910 l. 54496 zamianowała ks. Jana Senyszyna, zastępcą nauczyciela, z obowiązkiem nauczania religii ob. gr. kat.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 11. października 1910 l. 57225 przeniosła zastępcę katechety ob. gr. kat. ks. Józefa Procia w tym samym charakterze do szkoły realnej w Śniatynie.

C. k. Rada szkolna krajowa zatwierdziła w zawodzie nauczycielskim i nadała tytuł profesora ks. Andrzejowi Nogajowi katechecie ob. rzym. kat. rozp. z dnia 13. października 1910 l. 61294 i Aleksandrowi Wieleżyńskiemu rozp. z dnia 23. grudnia 1910 l. 76655.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 13. marca 1911 l. 4248/IV. udzieliła p. Ruxerowi Stanisławowi urlopu na drugie półrocze roku 1911.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 8. czerwca 1910 l. 30531, udzieliła urlopu Urbanowi Piotrowi na pierwsze półrocze roku szkolnego 1910/11 a rozp. z dnia 19. marca 1911 l. 2230/IV. przedłożyła ten urlop do końca roku szkolnego 1911.

Ważniejsze rozporządzenia Władz szkolnych.

C. k. Rada szkolna krajowa postanowiła zaliczyć w poczet książek dozwolonych do użytku szkoły następujące dzieła:

Rozp. z dnia 22. lipca 1910 l. 37127 Dr. Stan. Węckowski: Książka do nauki języka francuskiego cz. II.

Rozp. z dnia 17. lipca 1910 l. 39515 Ks. Dr. Stefan Szydelski. Dzieje biblijne nowego przymierza.

Rozp. z dnia 29. lipca 1910 l. 43831. Dziwiński, Podręcznik arytmetyki i algebry wydanie czwarte.

Rozp. z dnia 2. sierpnia 1910 l. 36197. Ignacy Kranz, Geometrya poglądowa na III. kl. szkół średnich.

Rozp. z dnia 2. sierpnia 1910 l. 35505. Ignacy Kranz, Geometrya poglądowa na II. kl. szkół średnich.

Rozp. z dnia 2. sierpnia 1910 l. 32576. Ignacy Kranz, Geometrya poglądowa na I. kl. szkół średnich.

Rozp. z dnia 2. sierpnia 1910 l. 32576 Ignacy Kranz, Arytmetyka na III. kl. szkół średnich.

Rozp. z dnia 30. sierpnia 1910 l. 50925. B. Gebert i G. Gebertowa, Opowiadania z dziejów ojczystych dla klasy I. na przeciąg roku szkolnego 1910/11.

Rozp. z dnia 6. października 1910 l. 55615. Dr. Ludwik Finkel i Dr. Stanisław Głąbiński, Historya monarchii austryacko węgierskiej oraz wiadomości polityczne i społeczne wydanie III.

Rozp. z dnia 8. października 1910 l. 35626. Fizyka i krótki rys kosmografii dla niższych klas szkół średnich A. M. Kawecki i Dr. Franciszek Tomaszewski wydanie VI.

Rozp. z dnia 31. października 1910 l. 63418. Dr. St. Węckowski i I. Szarota, la France t. I. i t. II.

Rozp. z dnia 31. października 1910 l. 56586. Dr. K. Petelenz, Deutsche Grammatik für die galizischen Mittelschulen wyd. IV.

Rozp. z dnia 7. grudnia 1910 l. 69751. Dr. St. Węckowski, Książka do nauki języka francuskiego część III.

Rozp. z dnia 22. lutego 1911 l. 1827/IV. Dr. Józef Nussbaum i Dr. Tadeusz Wiśniowski, Wiadomości z zoologii dla klas niższych szkół średnich wyd. III.

Rozp. z dnia 31. stycznia 1911 Antoni Małecki, Gramatyka języka polskiego szkolna, wydanie jedynaste.

Rozp. z dnia 12. kwietnia 1911 L. German i K. Petelenz, Ćwiczenia niemieckie dla klasy IV. szkół średnich wydanie IV. opracował Stanisław Gajczak.

Rozp. z dnia 12. kwietnia 1911 l. 6078/IV., Ks. T. Dąbrowski, Historya biblijna Stary Zakon, wydanie IV.

Rozp. z dnia 12. kwietnia 1911 Ippoldt-Stylo, Deutsches Lesebuch II. Teil für die VI. Klasse; wydanie II.

Rozp. z dnia 19. maja 1911 l. 8192/IV. R. Suppantschitsch, Poglądowa nauka geometryi dla kl. I. szkół średnich, przetłumaczył Dr. Ludwik Hordyński.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 1. września 1910 l. 51682. poleciła zaprowadzić naukę języka ruskiego jako przedmiotu względnie obowiązkowego według planu B z roku 1903 w klasach od I—III. w roku 1911 a z każdym następnym rokiem zawsze o jedną klasę wyżej na miejsce dotychczasowego planu. Rozporządzeniem z dnia 8. grudnia 1910 l. 72581 normuje ilość wypracowań pisemnych w drugim języku krajowym jako przedmiocie względnie obowiązkowym, która ma być taka sama jak w języku wykładowym.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 7. kwietnia 1911 l. 6520/IV. podaje do wiadomości reskrypt Pana Ministra Wyz. i Ośw. z dnia 30. marca 1911 l. 8661., normujący ferye szkolne główne i świąteczne

1. Główne ferye mają trwać w szkołach średnich od 1. lipca do 31. sierpnia 1911.

2. Pierwsze półrocze roku szk. 1911/12 ma się zakończyć w dniu 31. stycznia 1912, a drugie półrocze tego roku szkolnego rozpocznie się 1. lutego 1912, w którym jednak nauka nie będzie się odbywała.

3. Ferye świąt Bożego Narodzenia mają trwać od 22. grudnia do 27. grudnia 1911 dla ob. rzym.-kat., zaś od 5. do 10. stycznia 1912 dla ob. gr.-kat.

4. Ferye świąt Wielkanocnych mają trwać od wtorku Wielkiego tygodnia do środy po niedzieli wielkanocnej włącznie dla obrz. rzym.-kat., zaś od środy Wielkiego tygodnia do środy po niedzieli wielkanocnej włącznie według obrz. gr.-kat.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z dnia 6. lutego 1911 l. 1469/IV. oznajmia, że uczniowie klasy VII., którzy otrzymują z końcem drugiego półrocza w zachowaniu notę gorszą niż **dobrą** tracą uwolnienie od opłaty szkolnej muszą zatem po myśli reskryptu min. z dnia 29. lutego 1908 l. 10051. §. 26 alin. 1 i 2 uiścić taksę za egzamin dojrzałości w wysokości 20 koron.

KRONIKA ZAKŁADU.

Rok szkolny 1910/11 rozpoczął się dnia 3. września 1910 uroczystem nabożeństwem odprawionem dla uczniów obu obrządków w kościele szkolnym. Naukę regularną rozpoczęto dnia 4. września 1910.

Wpisy uczniów odbywały się dnia 30. czerwca dla kl. I. zaś 30. i 31. sierpnia dla wszystkich klas. Egzamin wstępny do kl. I. odbył się dnia 30. czerwca i 1. lipca, tudzież 1. i 2. września 1910.

Do egzaminu wstępnego zgłosiło się 94 uczniów, z których przyjęto do zakładu 60; a mianowicie z 91 uczniów publicznych przyjęto 59 a z 3 uczniów prywatnych przyjęto 1, na podstawie egzaminu wstępnego reprobowano 32 uczniów publicznych i 2 uczniów prywatnych.

Dnia 9. września i 19. listopada 1910 odbyły się w kościele szkolnym i w cerkwi katedralnej uroczyste nabożeństwa za spokój duszy ś. p. Najdostojniejszej Cesarzowej i Królowej Elżbiety, w których młodzież szkolna wzięła udział.

Dzień 4. października 1910 jako dzień imienin Najjaśniejszego Pana, Cesarza Franciszka Józefa I. obchodził Zakład uroczystem nabożeństwem, a z powodu 80 letniej rocznicy urodzin uroczystością szkolną.

Dzień 12. listopada 1910 święcił Zakład uroczyście, jako dzień patrona szkolnego św. Jozafata solennem nabożeństwem w kościele szkolnym.

W dniach od 28. listopada do 6. grudnia 1910 hospitował zakład JW. Pan Jan Franke Radca Dworu i inspektor szkolny, a dnia 6. grudnia odbyła się pod Jego przewodnictwem konferencya pohospitacyjna.

Dnia 12. grudnia 1910 odbył się wieczorek ku czci Mickiewicza.

Dnia 1. lutego 1911 po nabożeństwie rozdano uczniom świadectwa szkolne za pierwsze półrocze, które zakończono 31. stycznia 1911 a drugie półrocze rozpoczęto nauką szkolną dnia 3. lutego.

W dniach 20. września 1910 i 4. lutego 1911 odbył się egzamin dojrzałości w terminie jesiennym i zimowym pod przewodnictwem dyrektora zakładu.

Młodzież katolicka przystąpiła w ciągu roku szkolnego trzy razy do Sakramentu Pokuty i Ołtarza t. j. dnia 14. października 1910, 31. marca 1911 i 23. czerwca 1911.

Stan zdrowotny uczniów w ciągu roku szkolnego był w ogóle zadowalniający, mimo to kilku uczniów opuściło zakład z powodu słabości, a dnia 26. kwietnia 1911 zmarł Ernst Franciszek uczeń Ib. klasy.

Pisemny egzamin dojrzałości odbył się w dniach 30. i 31. maja i 2. i 3. czerwca 1911, a ustny w dniach 19—23. czerwca

pod przewodnictwem JWP. Michała Rembacza, Radcy rządu i c. k. dyrektora I. c. k. szkoły realnej we Lwowie.

Dnia 28. czerwca 1911 uczestniczyła młodzież szkolna w żałobnem nabożeństwie za spokój duszy ś. p. Cesarza Ferdynanda.

Rok szkolny zakończono dnia 30. czerwca 1911 uroczystem nabożeństwem i odśpiewaniem hymnu ludu, poczem rozdano uczniom świadectwa roczne.

TEMATY DO WYPRACOWAŃ PISEMNYCH.

A. W języku polskim.

Va. KLASA.

1. Okolica Stanisławowa (ćwiczenie w stylu opisowym) dom.
2. Powstanie polskiego języka literackiego (szk.)
3. Jakie myśli wypowiada Kochanowski w swych pieśniach (szk.)
4. Antygona a Ismena w tragedyi Sofoklesa (dom.)
5. Antenor a Parys w „Odprawie posłów" Kochanowskiego.

1. Znaczenie wypraw krzyżowych.
2. Rozbiór sielanki Szymonowicza „Kołacze".
3. Trylogia Sienkiewicza w stosunku do literatury polskiej XVII. w. (szk.)
4. Pług a miecz.
5. Zasługi Konarskiego.

Vb. KLASA.

1. Powrót z wakacyi (w formie listu) szk.
2. Jesień na wsi (opis) dom.
3. Twórcy prozy polskiej (szk.)
4. Stosunki polskie w „Odprawie posłów greckich" (dom.)
5. Znaczenie Skargi (szk.)

1. Wybór Rudolfa z Habsburga (dom.)
2. Przyjemności zimy (szk.)
3. Charakterystyka Marka Czertwana (szk.)
4. Wycieczka w okolicę Stanisławowa (dom.)

VIa. KLASA.

1. Powody odrodzenia literatury XVIII. wieku (szk.)
2. Pory roku a życie ludzkie (porównanie) dom.
3. Typy w komedyi Niemcewicza „Powrót posła" (szk.)
4. Jurand i Ursus (porównanie) dom.

5. Sposoby badania zjawisk fizycznych (dom.)
1. Zapatrywania Brodzińskiego na romantyzm i klasycyzm (szk.)
2. Myśl przewodnia „Ody do młodości“ (dom.)
3. Walter Alf u Krzyżaków (szk.)
4. Powody i początek wielkiej rewolucyi (dom.)
5. Przyroda w Panu Tadeuszu (szk.)

VIb. KLASA.

1. Zasługa i znaczenie Krasińskiego (szk.)
2. Objaśnić zdanie: Czem skorupa za młodu nasiąknie, tem na starość trąci (dom.)
3. Powrót posła jako broszura polityczna (szk.)
4. Winicyusz a Kmicic (porównanie) dom.
5. Wycieczka do gazowni miejskiej (szk.)
1. Myśl przewodnia w Morawskiego „Listach dla klasyków i romantyków (dom.)
2. Młodość Mickiewicza (szk.)
3. Śmierć Konrada Wallenroda (szk.)
4. Światły absolutyzm we Francyi (dom.)
5. Życie publiczne w Panu Tadeuszu (szk.)

VIIa. KLASA.

1. Tok myśli i literackie znaczenie improwizacyi Konrada (szk.)
2. Jakim środkom zawdzięczają miasta nowożytne swój wzrost i rozwój (dom.)
3. Charakterystyka Gustawa w „Ślubach panieńskich“ (szk.)
4. Rozwinąć myśl zawartą w zdaniu Mickiewicza: „W słowach tylko chęć widzim, w działaniu potęgę (dom.)
5. Tragizm Anhellego (szk.)
1. Charakterystyka Lechitów w „Lilli Wenedzie“ (szk.)
2. Hrabia Henryk w „Nieboskiej komedyi“ (dom.)
3. Woda jako czynnik geologiczny (dom.)

VIIb. KLASA.

1. Rozbiór i znaczenie „Widzenia“ ks. Piotra (III. cz. Dziadów) szk.
2. Znaczenie wsi dla ekonomicznego życia społeczeństwa (dom.)
3. Charakterystyka Papkina w „Zemście“ (szk.)
4. Ustrój społeczny w Polsce piastowskiej (dom.)
5. Społeczeństwo polskie w „Anhellim“ (szk.)
1. Wenedzi w tragedyi Słowackiego (szk.)
2. Świat chrześcijański w „Irydyonie“ (dom.)
3. Wpływ klimatu na człowieka (dom.)

B. W języku niemieckim.

Va. KLASA.

1. Reinecke vor Gericht (nach der Schullektüre) szk.
2. Entstehung und Bedeutung von Hermann und Dorothea (dom.)
3. Schillers Flucht aus Stuttgart (szk.)
4. Der Gegensatz zwischen Vater u. Sohn in Göthes „Hermann und Dorothea“ (dom.)
5. Parzivals Ankunft in der Gralburg (szk.)
6. Roland Schildträger v. L. Uhland (Nacherzählung) szk.
7. Die Seefahrt, ein Bild des menschlichen Lebens (nach gegebener Disposition) dom.
8. Ursachen der Kreuzzüge (dom.)
9. Mut zeigt auch der Mameluk, Gehorsam ist des Christen Schmuck (im Anschluss an Schillers Ballade „Der Kampf mit dem Drachen“) (szk.)
10. Gewitter und Krieg (dom.)
11. Lenore von Bürger (Inhalt und Sentenz) szk.
12. Vorteilhafte Folgen der Entdeckung Amerikas (dom.)

Vb. KLASA.

1. Reineckes erste Tücke (dom.)
2. Hektor und Andromache (auf Grund der Schullektüre (szk.)
3. Siegfrieds erste Begegnung mit Krimhilden (dom.)
4. Apotheker und Pfarrer bei ihrem ersten Auftreten (dom.)
5. Sigurd und Regin (auf Grund der Schullektüre) dom.
6. Ordensritter und Ordensmeister (szk.)
7. Vater und Sohn (nach Göthes „Hermann u. Dorothea“) dom.
8. Uhlands Naturempfinden (auf Grund der Schullektüre) szk.
9. Roland und der Riese (auf Grund der Schullektüre) dom.
10. Das Wesen und die Bedeutung des Grals (szk.)
11. Die französische Revolution nach dem Berichte des Ortsrichters (auf Grund des Schullektüre) dom.
12. Mutter und Kind (auf Grund des Uhland'schen Gedichtes „Ständchen“) szk.

VIa. KLASA.

1. Der Untergang der Burgunden am Hofe Etzels (szk.)
2. Die Vorfabel von Lessings Drama „Nathan der Weise“ (dom.)
3. Die Entstehung der deutschen Schriftsprache (nach der Schullektüre) szk.

4. Die Parabel von den drei Ringen und ihre Bedeutung in Lessings Drama „Nathan der Weise“ (dom.)
5. Die Anfänge des Dramas in Deutschland (auf Grund des Schulunterrichtes) szk.
6. Was treibt den Menschen in die Ferne (dom.)
7. Die Vertreter des Christentums in Lessing's Drama „Nathan der Weise“ (szk.)
8. Die Schicksale Orests bis zu seiner Ankunft in Tauris (dom.)
9. Die Wurzeln der Bildung sind bitter, die Früchte süss (dom.)
10. Der Seelenkampf Iphigeniens (szk.)

VIb. KLASA.

1. Das Zeugnis in ber Tasche, das Bündel in der Hand, auf in die Schule! Freie Schilderung (dom.)
2. Walters Elegie. Ein Stimmungsbild der Zeit (szk.)
3. Die Exposition in Lessings „Nathan der Weise“ (dom.)
4. Luters Verdienste um die deutsche Sprache (szk.)
5. Meine Beschäftigung in freien Stunden (dom.)
6. Nathan und Saladin (auf Grund der Schullektüre) szk.
7. Staufen und Welfen (auf Grund des geschichtlichen Unterrichtes (dom.)
8. Das erregende Moment in Göthes Iphigenie (Schullektüre) szk.
9. Das Zeitalter der Aufklärung (nach der Schullektüre) dom.
10. Meine Absichten während der Ferien (freie Schilderung) szk.

VIIa. KLASA.

1. Geld ist ein guter Diener, aber ein schlimmer Herr (dom.)
2. Die Region des Himmels in dichterischer Darstellung (Faust I.) szk.
3. Die politische und soziale Bedeutung des Statuts von Wiślica auf Grund des geschichtlichen Unterrichtes) dom.
4. Übersetzung aus dem Polnischen (szk.)
5. Meine Lieblingslektüre (dom.)
6. Die Wette zwischen Faust und Mephisto (auf Grund der Schullektüre (szk.)
7. Der historische Hintergrund in Schiller's „Don Karlos“ (dom.)
8. Eine Übersetzung aus dem Polnischen (szk.)
9. Das Problem in Schillers „Das verschleierte Bild v. Sais“ (dom.)

VIIb. KLASA.

1. Wer mit dem Leben spielt, kommt nie zurecht,
   Wer sich nicht selbst befiehlt, bleibt immer Knecht.
   (Göthe) dom.
2. Fausts Erkenntnisdrang und die Wissenschaft (Faust I) szk.
3. Warum wird Kasimir der Grosse Bauernkönig genannt? (dom.)
4. Übersetzung aus dem Polnischen (szk.)
5. Mein künftiger Beruf (dom.)
6. Die vier Fakultäten nach Mephistos Auffassung (auf Grund der Schullektüre) szk.
7. Das erregende Moment in Schillers „Don Karlos" (dom.)

C. W języku francuskim.

Va. KLASA.

1. Odpowiedzi na zadane pytania na podstawie lektury (szk.)
2. Une excursion sur le Wołczyniec (dom.)
3. Les fruitiers de notre jardin (szk.)
4. Quel aspect a à présent notre ville? (dom.)
5. Odpowiedzi na zadane pytania po francusku (szk.)
6. L' automne (dom.)
7. Quels plaisirs avons-nous en hiver? (dom.)
8. Odpowiedzi na zadane pytania na podstawie lektury (szk.)
9. Les canaux (dom.)
10. Odpowiedzi na pytania z lektury po francusku (szk.)
11. Mon plus agréable sport (dom.)
12. Qui est le dernier grand général polonais? (dom.)
13. Les ballons dirigeables (d'après le livre) szk.
14. Les plaisirs du printemps (dom.)
15. Dictée.
16. Odpowiedzi na pytania (szk.)

Vb. KLASA.

1. Notre salle d'étude (szk.)
2. Mon domicile (dom.)
3. Description d'un tableau de Hölzel (szk.)
4. Quel voyage préférez-vous, à pied ou en chemin de fer? (dom.)
5. Mes vêtements (szk.)
6. La rue (dom.)

7. Description d'un tableau (szk.)
8. Une récréation (dom.)
9. Le printemps (szk.)
10. Les montagnes (dom.)
11. Dictée.
12. Les forces de la nature au service de l'homme (dom.)
13. Odpowiedzi na pytania na podstawie lektury (szk.)
14. Mes occupations de tous les jours (dom.)
15. Dictée.
16. Une partie de campagne (dom.)

VIa. KLASA.

1. La conquête de la Gaule par les Romains (szk.)
2. La vie d'un paysan (dom.)
3. La poésie des trouvéres (szk.)
4. Ce que je vois par ma fenêtre? (dom.)
5. Les idées de la Pléiade (szk.)
6. Une récréation (dom.)
7. Opowiadanie na podstawie przerobionego ustępu (szk.)
8. Mettre en prose le sonnet de Ronsard: A Héléne (dom.)
9. Versailles (szk.)
10. La cour de Louis XIV. (dom.)
11. Opowiadanie na podstawie przerobionego ustępu (szk.)
12. Le lion, le loup et le renard (dom.)
13. La premiére représentation d' Esther (szk.)
14. Les causes de la Révolution (dom.)
15. Décrivez le tableau de Grenze: L'accordée de village (szk.)
16. Comment voudriez-vous passer les vacances? (dom.)

VIb. KLASA.

1. La religion des Gaulois (szk.)
2. Lettre à mes parents (dom.)
3. Chansons de geste (szk.)
4. Le désastre de Roncevaux (dom.)
5. Les moutons de Panurge (szk.)
6. En allant à l'école (dom.)
7. Opowiadanie na podstawie przerobionego ustępu (szk.)
8. Mettre en prose l'ode de Ronsard: A Cassandre (dom.)
9. La France vers la fin du régne de Louis XIV. (szk.)
10. Les salons parisiens au XVII. siécle (dom.)

11. Opowiadanie na podstawie przerobionego ustępu (szk.)
12. L'huître et les plaideurs (dom.)
13. Voltaire (szk.)
14. Quelles furent les causes de la perte de Rome? (dom.)
15. La prise de la Bastille (szk.)
16. Qu'allez-vous faire pendant les vacances? (dom.)

VIIa. KLASA.

1. Odpowiedzi na zadane pytania z historyi literatury (szk.)
2. Les chemins de fer de notre pays (dom.)
3. Une lettre à mon professeur (szk.)
4. Est-ce que notre pays possede encore quelques combustibles outre le bois? (dom.)
5. Odpowiedzi na pytania (szk.)
6. Victor Hugo (dom.)
7. Quel isthme a-t-on déjá percé et quel canal célébre veut-on encore creuser? (dom.)
8. Odpowiedzi na pytania (szk.)
9. Mickiewicz à Paris (szk.)
10. Quels sont les plus beaux endroits aux environs de Stanislaopol? (dom.)
11. Odpowiedzi na pytania (szk.)
12. Boleslas I. et Casimir le Grand (dom.)
13. La theorie de Laplace (szk.)
14. Les fleuves de la Galicie (dom.)

VIIb. KLASA.

1. Odpowiedzi na pytania (szk.)
2. La loi de la gravitation universelle de Newton (dom.)
3. Quels sont les devoirs d'un jeune homme? (szk.)
4. Borysław ou un autre lieu, oú l'on trouve du pétrole (dom.)
5. Odpowiedzi na pytania (szk.)
6. Que ferai-je aprés mon examen de maturité? (dom.)
7. Les ports de la France (dom.)
8. Odpowiedzi na pytania (szk.)
9. Quelles fabriques avons-nous dans notre ville? (dom.)
10. Corinne prenant congé de ses concitoyens (szk.)
11. Notre écrivain Prus (dom.)
12. Kościuszko en Amérique (dom.)
13. Les plus grands historiens français au XIX. siécle (szk.)
14. Les montagnes de la Galicie (dom.)

D. Przy egzaminie dojrzałości.

Oddział I.

a) Język polski.

Do wyboru uczniów jeden z trzech tematów:
1. Lud wiejski w poezyi polskiej.
2. Znaczenie dróg wodnych dla ekonomicznego rozwoju narodu.
3. Przyczyny politycznego upadku Polski.

b) Język niemiecki.

Przetłumaczyć z książki p. t. „Mieczysław Zaleski, Opowiadania z dziejów austryackich i powszechnych“, wyd. II. Lwów 1907 strona 6. od słów „Obok do.... ślimaka“.

c) Język francuski.

Przełożyć na język polski: Voltaire: Siécle de Louis XIV. p. 171 od słów Contre Turenne, Condé do słów ....l'oposè de Louis XIV.

d) Geometrya wykreślna.

1. Przez Punkt A przechodzą trzy proste l, m, n, dowolnie nachylone i nie leżące na jednej płaszczyźnie; wyznaczyć oś stożka prostego przechodzącego przez te proste oraz rzuty tego stożka.
2. Wyznaczyć kulę przechodzącą przez trzy punkty a stykającą się z daną płaszczyzną.
3. Dana jest elipsoida obrotowa wydłużona, której oś obrotu jest prostopadłą do rzutni pionowej, wyznaczyć cień własny i rzucony przy oświetleniu równoległem.

Oddział II.

a) Język polski.

Do wyboru uczniów jeden z trzech tematów:
1. Jak rozwiązują zagadnienie bytu narodowego trzej najwięksi poeci polscy?
2. Znaczenie badań ścisłych dla współczesnego postępu technicznego.
3. Wielcy uczeni a wielcy zdobywcy (porównanie).

b) Język niemiecki.

Przetłumaczyć na język polski ustęp z dzieła p. t. Mieczysław Zaleski. Opowiadania z dziejów austryackich i powszechnych, wydanie II. Lwów 1907 strona 9. od słowa: „Babilończycy“.... do słowa „ciemiężców“.

c) Język francuski.

Przetłumaczyć na język polski z Voltaire: Siécle de Louis XIV strona 550 od słów: „Sa lettre à l'archevêque de Reims do słów str. 551 ....étaient trop fortes“.

d) Geometrya wykreślna.

1. Dane są dwa punkty A i B oraz kierunek promienia światła przechodzącego przez A; wyznaczyć płaszczyznę, któraby odbijała promień przez A do punktu B w ten sposób, by promień padania i promień odbicia były wzajemnie prostopadłe.
2. Czworościenny nieumiarowy ostrosłup przeciąć podług równoległoboku, którego jeden bok miałby daną długość.
3. Dana jest nyża w rzutach prostokątnych; wyznaczyć cień własny, rzucony do wnętrza przy oświetleniu równoległem.

KÓŁKA NAUKOWE.

a) Kółko matematyczno-fizyczne.

Członków czynnych liczyło kółko 40, przeważnie uczniów klas VI. i VII. Działalność kółka polegała na urządzaniu wykładów z dziedziny matematyki lub fizyki i na pracach laboratoryjnych ucz. kl. VII. Prace kółka odbywały się pod opieką kuratora kółka p. prof. Hrycaka. Przewodniczącym kółka był Trębecki Michał, uczeń kl. VIIb i jego zastępca Mokrzycki Gustaw, uczeń VIIb klasy.

W roku bieżącym opracowano wykłady na tematy następujące: 1. Sposoby badań zjawisk fizycznych; 2. Psychologiczne podstawy badań zjawisk fizycznych; 3. Kwestya latania; 4. Polaryzacya światła; 5. Aeroplany i ich motory; 6. Liczby urojone i zespolone; 7. Wielowartościowość pierwiastków i podział koła na równe u równych części; 8. O motorach gazowych; 9. O za-

sadzie logarytmów naturalnych: 10. O zachowaniu energii, część I. 11. O zachowaniu energii, część II. 12. Historya maszyny parowej i jej zastosowanie do kolei żelaznych; 13. Budowa kanałów spławnych ze szczególnem uwzględnieniem budowy takich kanałów w Galicyi (wygłosił dla uczniów inżynier Ostrowski jako gość); 14. Budowa ciał niebieskich z obrazami świetlnymi; 15. Zarys kinetycznej teoryi gazów; 16. Drugorzędne przewodniki elektryczności; 17. Rozwiązanie ogólnych równań trzeciego i czwartego stopnia; 18. Budowa ciał niebieskich. (Po wykładzie obserwacya gwiazd przez lunetę): 19. Akumulatory elektryczne (demonstrowane na urządzeniu elektrowni szkolnej): 20. Fale elektryczne.

Prace uczniów w laboratoryum odbywały się regularnie we czwartek. Uczniowie przeprowadzali doświadczenia na przyrządach i robili pomiary rozmaitych wielkości fizycznych.

Kółko ma zaczątki własnej biblioteki, złożonej z książek darowanych na rzecz kółka i zakupionych za pieniądze zebrane z dobrowolnych datków członków; posiada też kilka modeli i rysunków sporządzonych przez członków.

b) Kółko chemiczno-przyrodnicze.

W roku szkolnym 1911 zawiązało się kółko chemiczno-przyrodnicze, obejmujące nauki przyrodnicze, krajoznawcze i chemiczne. Członków czynnych z klasy V. VI. i VII. liczyło 102. Zarząd kółka sprawowali jako przewodniczący Mokrzycki Gustaw i przewodniczący poszczególnych sekcyi według nauk przyrodniczych: Rek Adolf botanicznej, Łopatyński Konstanty zoologicznej, Jarmulski Maksym mineralogicznej, Trębecki Michał krajoznawczej, Zybura Kazimierz chemicznej. Działalność kółka polegała na urządzaniu odczytów i wycieczek naukowych.

W roku bieżącym wygłoszono następujące wykłady: 1) O użytkowaniu azotu z powietrza. 2) Niż Sarmacki. 3) Chlorowce. 4) Porcelana. 5) Funkcye komórki roślinnej. 6) Węgiel kopalny i olej skalny. 7) Dyffuzya. 8) Fauna i flora niżu Sarmackiego. 9) Żelazo i jego związki. 10) Ciśnienie osmotyczne. 11) Podział pracy w organizmach zwierzęcych. 12) Teorya ewolucyi ziemi. 13) Klimat Europy. 14) Warunki zdrowotności pomieszkań. 15) Pająki. 16) Podział pracy u roślin wyższych. 17) Miedź i jej zastosowanie w przemyśle. 18) Teorya dyssocyacyi. 19) Z życia kuraków. 20) Krew zwierząt kręgowych. 21) Środki spożywcze

i o racyonalnem odżywianiu się. 22) Ogólny pogląd na faunę dzisiejszego świata. 23) O użytkowaniu odpadków fabrycznych.

Kółko urządziło następujące wycieczki: 1) Do Halicza celem poznania pokładów geologicznych na tamtejszych odkrywkach i zebraniu tam znajdujących się minerałów. 2) Zwiedzono gazownię miejską. 3) Zwiedzono rafineryę nafty w miejscu.

Prace te w kółku odbywały się pod nadzorem i opieką prof. Westwalewicza Maryana i prof. Brylińskiego Ludwika.

Staraniem kółka będzie dążność do zgromadzenia zbiorów, okazów przyrodniczych, krajowych i utworzenia biblioteki których początek już zrobiono.

c) *Kółko historyczno-literackie.*

Kuratorem kółka jest prof. Kucharski, zarząd sprawowali uczniowie: Trębecki Michał jako przewodniczący, Żerebecki Franciszek jako sekretarz, Rotter Tadeusz jako skarbnik. W minionym roku administracyjnym odbyło się posiedzeń siedmnaście, z tego trzy były poświęcone walnemu zgromadzeniu lub omówieniu spraw organizacyjnych, resztę zajęły odczyty i pogadanki. Wygłoszono wykłady następujące: 1) Srul z Lubartowa a Latarnik. 2) Polskie wolnomularstwo narodowe (1821—24). 3) Krzyżacy. 4) Wpływ Byrona na Mickiewicza. 5) Referat z dzieła Zdziechowskiego „Byron i jego wiek“. 6) Najnowszy dramat polski. 7) Najnowsze utwory powieściowe cz. I. 8) Uroczyste posiedzenie ku uczczeniu pięćsetnej rocznicy bitwy pod Grunwaldem. 9) Polska poezya, średniowieczna. 10) Marya Konopnicka. 11) Fryderyk Szopen. 12) Powstanie Kościuszki 1794 r. 13) O stylu. 14) Jakiemi drogami dochodzi Mickiewicz i Krasiński do wiary swej w chrystusowość Polski?

Kółko liczyło 43 członków, przeciętnie było obecnych na każdem posiedzeniu 21 członków. Staraniem kółka historyczno-literackiego wychodziło za zezwoleniem i wiedzą Dyrekcyi pisemko litografowane p. t. Okruchy (dwutygodnik), zawierające prace i referaty uczniów tutejszego zakładu.

Ćwiczenia praktyczne w pracowni chemicznej.

Ćwiczenia w pracowni chemicznej odbywały się w dwu oddziałach w 8 godzinach tygodniowo. Brali w nich udział uczniowie kl. IV.—VII. w liczbie 40.

W kursie niższym przerobiono wiadomości wstępne z zakresu chemii doświadczalnej, wzięto analizę suchą, wykrywanie jonów metali i reszt kwasowych, oprócz tego preparowano sole i związki mineralne.

Na kursie wyższym wzięto preparatykę najprostszych związków organicznych, metodę oznaczenia ciężaru drobinowego ciał, analizę wagową, miareczkową i analizę gazów. Nadto przerobiono przykłady z analizy wód, środków spożywczych i minerałów.

Ćwiczenia fizyczne uczniów.

Ćwiczenia fizyczne polegały przedewszystkiem na obowiązkowej nauce gimnastyki, którą pobierali uczniowie każdej klasy w 2 godzinach tygodniowo. Oprócz tych systematycznych ćwiczeń uprawiano sporty i robiono sportowe wycieczki w okolice miasta i w sąsiednie góry. W czasie nauki gimnastyki ćwiczy się drużyna złożona z chętnych uczniów klas najwyższych w szermierce. Ćwiczenia te odbywają się podczas lub po godzinie gimnastyki i prowadzi je nauczyciel gimnastyki.

W zimie uprawiano sport łyżwowy, narciarski i saneczkowy. Wycieczek na nartach i saneczkach zrobiono z powodu sprzyjających warunków więcej aniżeli w roku minionym, w towarzystwie nauczycieli zakładu i nauczyciela gimnastyki. Wycieczki te uwidocznione poniżej w wykazie. Wielu uczniów młodszych, którzy nie dorośli do pokonywania wymaganego wysiłku w sporcie narciarskim i saneczkowym z ochotą biorą udział w ślizgawce, do której przystęp mają ułatwiony przez zakupno biletów abonamentowych. W dnie pogodne na wiosnę i w wczesnej jesieni biorą udział prawie wszyscy uczniowie w grach i zabawach na boisku w parku „dla gier i zabaw dla młodzieży“. Młodzież całego zakładu klasami w dnie im przeznaczone uprawia grę w piłkę nożną na boisku przeznaczonym tylko dla uczniów szkoły realnej.

Wykaz wycieczek przedsiębranych w roku szkolnym 1911.

L. p.	Data	Miejsce	Liczba uczniów biorących udział	Cel i rodzaj zajęcia	Nauczyciele nadzorujący
1	21/9. 1910	Jaremcze	26	Przejście przez Czarnohorzec	Wieleżyński Frenkel Westwalewicz Świątkiewicz
2	27/9. 1910.	Halicz	39	Pieszo z Halicza przez Jezupol	Westwalewicz Wieleżyński Frenkel
3	4/12. 1910	Dubowce	23	Narty i sanki	Wieleżyński Świątkiewicz
4	26/12. 1910	Pawełcze	12	Sanki	Frenkel
5	5/1. 1911	Worochta	8	Narty	Westwalewicz Świątkiewicz
6	6/1. 1911	Worochta	8	Narty	Westwalewicz Świątkiewicz
7	14/1. 1911	Worochta	18	Narty, sanki	Świątkiewicz Wieleżyński Westwalewicz
8	19/1. 1911	Dubowce	16	Narty, sanki	wiątkiewicz Wieleżyński Westwalewicz
9	22/1. 1911	Kukul 1544	5	Narty, sanki	Świątkiewicz Wieleżyński
10	29/1. 1911	Dubowce	26	Nauka na nartach	Świątkiewicz
11	1/2. 1911	Tatarów	5	Narty	Świątkiewicz
12	4/7. 1911	Hwozd	11	Narty	Świątkiewicz
13	5/2. 1911	Wołczyniec	12	Sanki	Świątkiewicz Westwalewicz
14	12/2. 1911	Podłuże	16	Narty	Świątkiewicz Westwalewicz Wieleżyński
15	15/2. 1911	Woronienka	10	Narty	Świątkiewicz
16	15/2. 1911	Worochta	16	Narty	Wieleżyński

ZBIORY NAUKOWE.

Biblioteka nauczycielska.

Zawiadowca: Dr. EUGENIUSZ KUCHARSKI.

Biblioteka nauczycielska liczyła do roku 1910 numerów inwentarza 2.368. W roku administracyjnym 1911 nabyto lub otrzymano w darze dzieła następujące:

Ia. 29/2373 Katalog wydawnictw Akademii Umiejętności. — Kraków 1910.
Ib. 17/2378 Catechismus z r. 1543 wydał Fr. Puławski. „Biblioteka pisarzów polskich“ Nr. 56.
„ 17/2379 Bartosza Paprockiego: Odpowiedź, wydał J. Czubek tamże Nr. 57.
„ 17/2380 Jana Dzwonowskiego: Pisma, wyd. K. Badecki tamże Nr. 58.
„ 17/2384 „Walna wyprawa do Włoch z 1617 r. wyd. K. Badecki tamże Nr. 59.
II. 36/2372 Michał Sobeski: Uzasadnienie metody objektywnej w estetyce. Kraków 1910.
„ 37/2390 Adam Żółtowski: Metoda Hegla. Kraków 1910.
III. 79/2409 Er. Eug. Piasecki et Dr. Ed. Dubanowicz: „Les écoles polonaises. Lwów 1910.
„ 90/2410 Warsztaty Jordanowskie, referaty. Lwów, dod. „Muzeum“ 1911.
„ 91/2411 Przyczynki do dziejów wychowania i oświaty w Polsce. Dod. „Muzeum“ Lwów 1910.
VIa. 353/2382 Adam Wrzosek: Jędrzej Śniadecki, 2 t. Kraków 1910.
„ 354/2389 Józef Tretiak: Bohdan Zaleski (1802 — 1831). Kraków 1911.
„ 355/2395 Wilhelm Feldman: Współcześni pisarze w wyjątkach. Warszawa 1911.
„ 356/2396 Ferd. Hösick: Miłość w życiu Krasińskiego. Kraków 1909.
„ 357/2397 Ign. Chrzanowski: Z dziejów satyry polskiej XVIII. wieku. Warszawa 1909.
„ 358/2398 Adam Siedlecki: Wyspiański. Kraków 1909.
„ 359/2399 Jan Gwalbert Pawlikowski: Mistyka Słowackiego. Lwów 1909.

VIa. 360/2400 J. Katerla: „Róża“. Kraków 1911.
„ 361/2401 Stefan Żeromski: Sułkowski, tragedya. Kraków 1910.
„ 362/2402 Stan. Brzozowski: Legenda Młodej Polski. Lwów 1910.
„ 363/2403 Artur Śliwiński: Maurycy Mochnacki. Lwów 1910.
VId. 63/2388 Georg Stier: Petites causeries françaises. Göthen 1910.
„ 64/2413 Pierre Lasserre: Le romantisme française 3-éd. Paris 1908.
VIII. 77/2376 Dr. Karl Rathgen: Die Entstehung des modernen Japan. Dresden 1896.
„ 78/2377 L. Bodnarescul: Einige Weihnachts- und Neujahrsbräuche d. Rumänen. Czernowitz 1903.
„ 79/2385 Talko-Hryncewicz: Materyały do etnologii i antropologii ludów Azyi środkowej.
IX. 125/2374 K. Gorski: Stosunki Kazimierza Sprawiedliwego z Rusią. Lwów 1875.
„ 126/2375 Balzer Osw.: Rejestr złoczyńców grodu sanockiego. Lwów 1891.
„ 127/2381 Stanisław Szpotański: Maurycy Mochnacki. — Kraków 1910.
„ 128/2383 Dr. Ludwik Finkel: Elekcya Zygmunta I. Kraków 1910.
„ 129/2391 Wacław Tokarz: Warszawa przed wybuchem powstania 1794 r. Kraków 1911.
„ 130/2407 Tad. Korzon: Historya wieków średnich. Warszawa 1905.
XI. 103/2404 Burkhardt: Eliptische Funktionen. Leipzig 1906.
„ 104/2405 „ Algebraische Analysis. Leipzig 1903.
„ 105/2406 „ Finführung in der Theorie der analytischen Funktionen. Leipzig 1903.
XII. 110/2392 Steuer: Planktonkunde. Leipzig 1910.
„ 111/2393 Goebel: Einleitung in die experimentelle Morphologie. Leipzig 1908.
„ 112/2394 Czartkowski Ad: Doświadczenia z fizyologii roślin. Warszawa 1910.
XIIIa. 70/2369 H. Hahn: Leitfaden für physykalische Schülerübungen. Berlin 1909.

XIIIa. 71/2370 H. Hahn: Handbuch für physykalische Schülerübungen. Berlin 1909.

„ 72/2371 Dr. J. Frichs: Physikalische Technik 2 tomy w 4 vol. Braunschweig 1904.

XIIIb. 60/2387 Treadwell: Chemia analityczna ilościowa tłum. Brunner. Kraków 1908.

XIV. 71/2386 J. Bołoz Antoniewicz; Grottger. Lwów 1910.

Biblioteka otrzymywała nadto w darze wszystkie wydawnictwa Akademii Umiejętności w Krakowie i prenumerowała czasopisma następujące: Biblioteka warszawska, Encyklopedya wychowawcza, Encyklopedya wielka, Słownik języka polskiego, Kwartalnik historyczny, Poradnik językowy, Przegląd filozoficzny wraz z Ruchem filozoficznym, Wszechświat, Monatshefte für naturwissenschaftlichen Unterricht, Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht, Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Zeitschrift für Zeichen und Kunstunterricht, Zeitschrift für Realschulwesen, Misye katolickie, Muzeum, La Revue.

Biblioteka uczniów.

(polska, ruska, francuska).

Zawiadowca: ALEKSANDER WIELEŻYŃSKI.

Z końcem r. szk. 1909/10 liczyła biblioteka . . .	1201 dzieł
W roku szkolnym 1910/11 zakupiono	94 „
Stan biblioteki z końcem r. szk. 1910/11 wynosi .	1295 dzieł.

Dla biblioteki uczniów zakupiono w roku szkolnym 1010/11 następujące książki:

Zabłocki: Sarmatyzm. — Żmichowska: Poganka. — Przybyszewski: Śnieg. — Kallenbach: Lament chłopski na pany. — Wyspiański: Warszawianka, Wyzwolenie, Wesele, Kazimierz Wielki. — Tetmajer: Ksiądz Piotr. — Kisielewski: W sieci. — Hauptman: Dzwon zatopiony. — Tretiak: Juliusz Słowacki. — Kallenbach: Krasiński. — Siedlecki: Wyspiański. — Gostomski: Z przeszłości i teraźniejszości. — Chmielowski: Adam Mickiewicz. — Żeromski: Siłaczka. — Gostomski: Pan Tadeusz. — Chmielowski: Najnowsze prądy. — Brodziński: Mowa o narodowości. — Moliére: Świętoszek. — Skiba: Nad poziomy. — Nussbaum: Z zagadnień biologii, Z teki biologa. — Touluse: Mózg i jego czynności. — Bolesławita: Dziecię starego miasta. —

Hofmanowa: Dziennik Franciszki Krasińskiej. — Fredro: Wielki człowiek od małych interesów, Cudzoziemczyzna, Odludki i poeta. — Ibsen: Budowniczy Solness, Wróg ludu, Upiory. — Krasicki: Przypadki M. Doświadczyńskiego. — Kraszewski: Powrót do gniazda, Charakterystyki literackie, Arcydzieła Westa. — Kochanowski: Odprawa posłów. — Kraszewski: Budnik. — Skarga: Kazania sejmowe. — Kochanowski: Wybór Fraszek. — Krasiński: Noc letnia. — Tacyt: Germania. — Syrokomla: Wybór pism I. — Ujejski: Marathon i Skargi Jeremiego. — Libelt: O miłości ojczyzny. — Zabłocki: Fircyk w zalotach. — Sofokles: Edyp w Kolonie. — Słowacki: Balladyna, Kordyan. — Krasiński: Przedświt, Nowela polska III. — Fredro: Zemsta. — Ewald: Dwunożny ujarzmiciel. — Ceysinger: Lipnicki. — Synoradzki: Przygody towarzysza pancernego. — Strebejko: Bohater Pawełka. — Green: Brat ociemniały. — Kipling: Takie sobie bajeczki. — Dickens — Dawid Copperfield. — Hagenbeck: Z życia zwierząt w niewoli. — Morawska: Żołnierzyk burski. — Ruskin: Król złotej rzeki. — Gębarski: Robinsohn tatrzański. — Kowerska: Dzielny chłopiec. — Stables: Na dalekiej północy. — Grudzińska: Tymko Orlik. — Paciorkowski: Głogowa, Trembowla. — Wernic: Przygody dwóch chłopców, Grześ z Sanoka. — Show: Ludzie dorośli. — Chmielewski: Twoje ziemie. — Desbeau: O czem się Janek dowiedział. — Bullen: W pogoni za kaszalotem. — Teresa Jadwiga: Szlachetne serca. — K. Ewald: Opowiadania. — Berthet: Młodzież w 5-ciu częściach świata. — Jerlicz: Syn marnotrawny. — Morawska: Dziewięć powiastek. — Swift: Podróże Guliwera. — Weryho: Co znalazłem w stawach i kałużach. — Umiński: Balonem do bieguna. — Buckley: Staw i rzeka, Na wakacyach w zalesiu, Życie roślin, Życie ptaków, Życie w polu i w lesie, Drzewa i krzewy. — Thompson: Opowiadania z życia zwierząt. — Wernic: W imię przyjaźni. — Kraszewski: Stara baśń. — Korzeński: Obce ludy, obce Kraje, Robinson Kruzoe.

Niemiecka biblioteka uczniów.

Zawiadowca: prof. ANDRZEJ PROCYK.

Z końcem roku szk. 1909/10 liczyła biblioteka . .	351 dzieł
W roku szk. 1910/11 zakupiono	9 „
Stan biblioteki z końcem roku szk. 1910/11 . . .	360 dzieł.

W roku szkolnym 1910/11 zakupiono następujące dzieła: May Karl: Winnetou; Orangen und Datteln, In den Kordilleren. —

Hoffmann Otto: Der Prairievogel. — Hebbel Friedrich: Agnes Bernauer, Die Nibelungen. — Anzengruber L.: Der Meineidsbauer. — Heyse Paul: Andrea Delfin. — Goethe: Faust.

Zbiory naukowe do nauki geografii i historyi.

Zawiadowca: prof. RACIBORSKI TADEUSZ.

Z końcem roku szkolnego 1911 zawierał inwentarz numerów 218. W roku szkolnym 1911 zakupiono: Baldamus: do Historyi Niemiec 1278—1500. — Spruner: Europa w XVIII. stuleciu. — Gaebler: Alpy, Rosya. — Majerski: Galicya. — Stillera Atlas podręczny, wydany przez Pethersa I. instytut geograficzny w Gotha.

Gabinet fizykalny.

Zawiadowca: prof. HRYCAK TEODOR.

W bieżącym roku szkolnym zakupiono następujące przyrządy: 3 menzury, 4 termometry, młotek do widełek strojowych, smyczek, 2 magnesy, baterye butelek lejdejskich, przyrząd do okazania działania lampy Nernsta, lunetę ćwiartkową Maug'a, teodolit, lunetę parallaktyczną i 33 sztuk przyborów drobnych. Ogólna liczba przyrządów fizycznych wynosi z końcem b. roku szkolnego 623.

Gabinet przyrodniczy.

Zawiadowca prof. BRYLIŃSKI LUDWIK.

Z końcem roku szkolnego 1910 liczył gabinet modeli, tablic i okazów we wszystkich trzech działach: 1293.

W roku szkolnym 1911 zakupiono: Pfurtscheller: tablic zoologicznych 7. Ptaki wypchane: Turtur auritus, Plectrophanes nivalis, Cannabina linota, Fringilla chloris masc. et fem., Sitta caesia, Anthus arboreus, Philopneuste trochilus, Regulus cristatus et ignicapillus, Emberiza hortulana et schoeniclus, Serinus hortulanus, Motacilla sulphurea, Alauda arborea, Anthus pratensis et aquaticus, Lanius rufus, Accentor modularis, Hypolais icterina, Sylvia curruca et atrocapilla, Acrocephalus palustris, Erithacus rubacula, Ruticilla phänicura et tithys, Monticola saxatilis et cyanea, Saxicola oenanthe, Panurus biarmicus, Muscicapa atricapilla. Parus coeruleus, ater et cristatus.

Z końcem roku szkolnego 1911 liczył gabinet okazów 1334.

Gabinet chemii.

Zawiadowca prof. WESTWALEWICZ MARYAN.

Z końcem roku szkolnego 1911. liczył gabinet chemii numerów inwentarza 458.

W roku szkolnym 1911. zakupiono centryfugę, wannę porcelanową na rtęć, trójnogi z blachy cynkowanej, biretę systemu Winkler-Hempel, aparat do rozkładu wody, aparat do wywiązywania gazów systemu Pohla i aparat destylacyjny z miedzianą suszarką. Nadto zakupiono szkło, preparaty i odczynniki, używane przy doświadczeniach na lekcyach szkolnych.

Gabinet rysunków geometrycznych.

Zawiadowca prof. WIELEŻYŃSKI ALEKSANDER.

Z końcem roku 1911 było numerów inwentarza, zawierającego przyrządy miernicze, rysunkowe, modele do geometryi, 60.

Gabinet rysunków odręcznych.

Zawiadowca prof. GRONDALCZYK JAN.

Z końcem roku szkolnego 1911 liczył gabinet 418 pozycyi inwentarza. W bieżącym roku szkolnym zakupiono modele grzybów, rączkę miecza, hełm z wizyrem, tarczę bojową i róg myśliwski.

Fundusze na środki naukowe.

Dotacya miasta Stanisławowa na środki naukowe .	2000 K. — h.
Datki uczniów na środki naukowe zebrane przy wpisach	1032 „ — „
Z taks wstępnych wpłynęło	453 „ 60 „
Taksy za duplikaty świadectw wynosiły	68 „ — „
Razem . .	3553 K. 60 h.

Pomoc materyalna dla ubogich uczniów.

Pomoc materyalną otrzymywali uczniowie: a) z fundacyi stypendyjnych, b) zapomogi z funduszu zakładu dla ubogich uczniów c) od Towarzystw burs.

A) Stypendya.

1. Stypendyum z fundacyi Stanisława Strzałkowskiego		500 K.
1. „ „ Józefa Pukalskiego	. . .	200 „
1. „ „ Bron. Stillerów	. . . .	400 „
1. „ „ Samuela Głowińskiego	.	315 „
1. „ „ Czajkowskiego	. . . .	400 „
Zapomoga wypłacana miesięcznie z Wydziału krajowego funduszu sierocego w kwocie rocznej	. . . .	180 „
Razem	. .	1995 K.

B) Zapomogi.

Dla wspierania ubogich uczniów tutejszego Zakładu istnieje fundusz powstający z dobrowolnych datków uczniów lub ich rodziców przy wpisach.

Stan tego funduszu jest następujący:

a) Przychód.

Przy wpisach w roku szkolnym 1911 złożyli: Zborowski Ryszard 1·80 K., Mayer Maryan 1 K., Nawrocki Mieczysław 1 K., Grajk Arpad 1·20 K., Schreier Zygm. 1 K., Stasyszyn Józef 2 K., Ramer Rudolf 1 K., Dreher Fryderyk 2·80 K., Hermann Alfred 20 K., Cukrowicz Kazimierz 1 K., Fernhoff Manuel 1 K., Czechowicz Mieczysław 1 K., Bahr Wiktor 10 K., Merunowicz Andrzej 2·80 K., Szpilczyński Jan 1 K., Szawłowski Kazimierz 1 K., Proskurnicki Jarosław 1 K., Brichta Mieczysław 1 K., Obyrek Włodzimierz 1 K., Nowak Witold 1 K., Czaporowski Zdzisław 1 K., Weintraub Wilhelm 1·20 K., Gajdosz Wład. 2 K., Seidl Edmund 1 K., Fuhrmann Izydor 1 K., Dziurzyński Władysław 1 K., Sobel Szmerl 1 K., Chodziński Jan 1 K., Kahan Józef 2 K., Wołoszyn Stanisław 1 K., Rozwadowski Józef 2·80 K., Pszonka Władysław 1 K., Walkowski Tadeusz 1 K., Dąbrowski Karol 1 K., Insler Leon 2 K., Selzer Markus 1 K., Pantke Kuno 1 K., Strassmann Chaim 1 K., Werth Wilhelm 1 K., Eckhardt Rudolf 1 K., Czechowicz Tadeusz 1 K., Wiszniewski Józef 1 K., Bodnaruk Włodzimierz 2 K., Krzemieniecki Jan 1 K., Gawliński Stanisław 1 K., Schloss Emil 1 K., Siwiński Kazimierz 1 K., Ombach Józef 1 K., Jarmulski Kornel 1 K., Hantzko Zygmunt 1 K., Pyrzanowski Adam 10 K., Kurzmann Jakób 1 K., Perlik Włodzimierz 10 K., Szolin Stanisław 3 K., Stasyszyn Wilhelm 1 K., Dettloff Godzisław 1 K., Jełowicki Tadeusz 1 K., Pietrański Aleksander 1 K., Begejowicz Justyn 1 K.,

Wick Karol 1 K., Szumański Stanisław 1 K., Kolnik Leon 1 K., Tokarski Eugen. 1 K., Janicki Aleksander 1 K., Lermer August 1 K., Sowa Kajetan 1 K., Hilczer Jan 1 K., Biłous Orest 1 K., Nowicki Mieczysław 2 K., Mokrzycki Władysław 1 K., Sieminowicz Omelan 1 K., Terlecki Aleksander 1 K., Nadachowski Franciszek 1 K., Błażek Władysław 1 K., Kwiatkowski Wojciech 4 K., Krzemieniecki Adam 1 K., Hanus Julian 1 K., Rawski Adam 1 K., Kunz Antoni 1 K., Höchl Otto 1 K., Robinsohn Karol 1 K., Biesiadecki Zygmunt 1 K., Zinn Hersz 1 K., Głuchowski Julian 1 K., Schneider Stanisław 1 K., Kosiński Adam 2 K., Abram Adolf 1 K., Dynko Adam 1 K., Kalous Mieczysław 10 K., Merunowicz Jerzy 1 K., Kopkowicz Franciszek 1 K., Heller Władysław 1 K., Bernhard Jan 1 K., Schloss Ludwik 2 K., Rotter Alojzy 1 K., Keler Roman 1 K., Green Stanisław 1 K., Jarina Maryan 1 K., Siczyński Omelan 2 K., Eigenfeld Leon 1 K., Sieminowicz Bohdan 1 K., Sochocki Jerzy 1 K., Trębecki Michał 1 K., Żerebecki Franciszek 1 K., Janicki Jan 1 K., Mokrzycki Gustaw 1 K., Kamiński Karol 1 K., Jarmulski Maksym. 1 K., Iwanowicz Eugen. 1 K., Muszyński Józef 1 K., Hönigsberg Oskar 1 K., Świątkiewicz Stanisław 1 K. — Drobnymi datkami złożono 57 K.

1.	Razem przy wpisach złożono	247	K.	60 h.
2.	Pozostałość kasowa z roku 1910	215	„	26 „
3.	Strassmann ucz. IIIb kl.	1	„	— „
4.	Uczniowie kl. VII. reszta ze zakupno papieru	4	„	42 „
	Razem . .	468	K.	28 h.

b) Rozchód.

1.	Na zakupno książek szkolnych dla biednych uczniów w księgarni Jasielskiego	321	K.	40 h.
2.	Za sprawienie 1 płaszcza	40	„	— „
3.	Na opłatę szkolną dla ucznia V kl.	20	„	— „
4.	„ „ „ „ „ VII k. . . .	20	„	— „
	Razem . .	401	K.	40 h.

Zestawienie.

a) Przychód wynosił	468	K.	28 h.
b) Rozchód wynosił	401	„	40 „
Pozostałość kasowa jako pierwsza pozycya dochodu na rok szkolny 1912	66	K.	88 h.

C) Bursy.

W celu umożliwienia nauki uczniom ubogim lub sierotom istnieją Towarzystwa utrzymujące bursy dla uczniów szkół średnich.

Uczniowie szkoły realnej byli umieszczeni:

a) W bursie polskiej im. I. J. Kraszewskiego umieszczonych było 14 uczniów tut. szkoły realnej. — Prezesem Towarzystwa jest Dr. Jurkiewicz Włodzimierz, adwokat krajowy; zastępcą prezesa Nowosielski Franciszek, dyrektor szkoły realnej; kierownikiem i prefektem p. Drabik Władysław prof. II. gimn. i ks. Andrzej Nogaj, katech. obrz. rz. kat. szkoły realnej i p. Lewicki Kazimierz zast. naucz. I. gimn.

b) Druga bursa mieści się przy ochronce powiatowej dla opuszczonych chłopców im. J. Issakowicza. W ubiegłym roku szkolnym było umieszczonych 12 uczniów tut. szkoły realnej. Prezesem bursy jest p. Leopold Seidler, em. prof. szkoły realnej, a kierownikiem Dadak Jan, zast. naucz. I. gimn.

Statystyka uczniów.

(Liczby drobne oznaczają uczniów prywatnych).

	W KLASIE														Razem
	I.		II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.		
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	
I. Liczba uczniów.															
Z końcem roku 1910 było	33^{2}	37^{2}	42^{1}	42^{1}	46^{1}	46	24	28	37^{1}	43	29	29	23	24	483^{7}
Z początkiem r. szk. 1911 przyjęto . .	35	36	42	40	46	47	40	43	36	36	34	34	24	23	516
W ciągu roku 1911 przybyło	—	2	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
W ogóle zatem przyjęto	35	38	43	41	47	47	40	43	36	36	34	34	24	23	521
Między tymi było:															
Z zakładów obcych z kl. niższej .	—	—	2	1	1	—	—	—	1	2	—	—	1	—	8
Z zakładów obcych repetentów . .	2	1	1	—	—	—	2	1	—	—	—	—	—	—	7
Na podstawie egzaminu wstępnego .	30	32	2	3	4	2	—	—	1	—	—	—	—	—	74
Ponownie przyjętych:															
z klasy niższej	—	—	30	34	35	37	37	36	25	22	29	27	23	21	356
tych, którzy w roku 1910 wystąpili ponownie przyjęto	2	3	1	2	2	—	—	3	2	2	1	1	—	—	19
Repetentów tutejszego zakładu . . .	1	2	7	1	5	8	2	2	7	10	4	6	—	2	57
W ciągu r. 1911 wystąpiło z zakładu .	4	9	4	4	6	4	6	10	11	9	6	4	3	—	80
Liczba uczniów z końcem roku . . .	31	29	39	37	41	43	35	32	25	27	28	30	21	23	441
Między tymi było:															
publicznych	31	29	37	36	41	43	35	32	25	27	28	30	21	23	438
prywatnych	—	—	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
II. Według miejsca urodzenia:															
Z miasta Stanisławowa	14	13	16	11	14	17	18	17	13	12	9	15	10	10	189
Z Galicyi poza miastem	16	15	18^{2}	22^{1}	26	24	16	15	11	15	17	14	10	13	232^{3}
Z innych krajów koronnych	—	1	3	2	1	2	1	—	—	—	1	—	1	—	12
Z Węgier	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Z Rosyi	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	3
Z Rumunii	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Razem	31	29	37^{2}	36^{1}	41	43	35	32	25	27	28	30	21	23	438^{3}
III. Według języka ojczystego było:															
Mówiących po polsku	21	25	35^{2}	24	31	40^{1}	21	31	23	23	23	28	17	21	363^{3}
„ po rusku	8	3	1	8	8	1	12	1	2	2	4	—	4	1	55
„ po węgiersku	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
„ po niemiecku	1	1	1	4	2	2	2	—	—	2	1	2	—	1	19
Razem	31	29	37^{2}	36	41	43^{1}	35	32	25	27	28	30	21	23	438^{3}
IV. Według wyznania religijnego:															
Wyznania rzymsko-katol.	18	15	21^{2}	14	18	27^{1}	16	17	11	9	11	8	11	16	212^{3}
„ grecko-katol.	8	4	2	8	8	2	12	1	2	2	4	—	4	—	57
„ ormiańsko-katol.	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
„ grecko-oryentalnego . . .	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	2
„ ewangielickiego	1	1	2	3	2	2	1	2	—	3	2	1	—	1	21
„ mojżeszowego	4	9	12	11	13	12	5	12	11	13	11	21	6	5	145
Razem	31	29	37^{2}	36	41	43^{1}	35	32	25	27	28	30	21	23	438^{3}

	W KLASIE														Razem
	I.		II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.		
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	
V. Wiek uczniów:															
Lat 11 miało	11	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	14
„ 12 „	11	16	5^{1}	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	37^{1}
„ 13 „	6	9	14^{1}	14	9	4	–	–	–	–	–	–	–	–	56^{1}
„ 14 „	1	1	11	14	11	20^{1}	11	4	–	–	–	–	–	–	73^{1}
„ 15 „	2	–	3	1	12	12	8	9	3	2	–	–	–	–	52
„ 16 „	–	–	2	2	7	7	11	11	3	5	5	–	–	–	53
„ 17 „	–	–	2	–	2	–	4	6	13	8	6	1	3	3	48
„ 18 „	–	–	–	–	–	–	–	1	4	8	8	10	4	5	40
„ 19 „	–	–	–	–	–	–	1	1	–	3	8	15	8	5	41
„ 20 „	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1	–	2	6	4	14
„ 21 „	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1	1	–	4	7
„ 22 „	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	2	3
Razem	31	29	37^{2}	36	41	43^{1}	35	32	25	27	28	30	21	23	438^{3}
VI. Według miejsca pobytu rodziców:															
Miejscowych	23	20	31	22^{1}	33	32	24	24	22	20	21	22	17	19	330
Zamiejscowych	8	9	6^{2}	14	8	11	11	8	3	7	7	8	4	4	108
Razem	31	29	37^{2}	36^{1}	41	43	35	32	25	27	28	30	21	23	438^{3}
VII. Klasyfikacya uczniów:															
a) Odnośnie do roku szkolnego 1910.															
Egzamin poprawczy składać pozwolono	3	7	3	8	8	5	3	5	11	10	10	5	3	3	84
Złożyło egzam. z wynikiem pomyślnym	2	7	3	8	8	5	3	5	9	10	10	4	3	3	80
„ „ „ niedostatecz.	1	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	1	–	–	4
Ostateczny wynik klasyfikacyi w roku szk. 1910.															
Do klasy następnej było:															
chlubnie uzdolnionych	3	1	2	1	1	2	1	–	1	–	–	2	1	–	15
uzdolnionych	26^{2}	34^{2}	34^{1}	36	37^{1}	35	21	26	27	29	25	18	21	23	392^{7}
nieuzdolnionych	4	2	6	5	8	9	2	2	9	14	4	9	1	1	76
Razem	33^{2}	37^{2}	42^{1}	42	46^{1}	46	24	28	37	43	29	29	23	24	483^{7}
b) Odnośnie do roku szkolnego 1911.															
Do klasy następnej było:															
chlubnie uzdolnionych	4	1	–	–	3	1	2	1	1	–	–	–	–	2	15
uzdolnionych	20	18	29	27	25	29	18	12	10	17	24	15	11	13	268
nieuzdolnionych	2	4	6^{2}	2	4	6^{1}	11	13	6	2	1	1	3	2	63^{3}
Pozwolenie na egz. popraw. otrzymało	5	6	2	7	9	7	4	6	8	8	3	14	7	6	92
Nie klasyfikowano	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Razem	31	29	37^{2}	36	41	43	35	32	25	27	28	30	21	23	438^{3}

	W KLASIE														Razem
	I.		II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.		
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	
VIII. Opłata szkolna:															
Opłatę szkolną złożyło:															
Ucz. publicznych i prywatnych za I. półrocze r. szk. 1911 . .	17	13	14	7	9	17	8	10	12	12	6	16	—	4	145
Ucz. publicznych i prywatnych za II. półrocze r. szk. 1911 . .	8	7	11	7	21	17	19	16	15	12	8	20	11	12	184
Od opłaty szk. było uwolnionych:															
w I. półr. r. szk. 1911 . . .	18	16	28	33	36	28	31	30	22	22	26	18	24	19	352
w II. półr. r. szk. 1911 . . .	23	22	28	30	21	27	16	17	11	15	20	10	10	11	261
Opłata szkolna wynosiła:															
w I. półr. r. szk. 1911 . . .	680	520	560	280	360	680	320	400	480	480	240	640	—	160	5800
w II. półr. r. szk. 1911 . . .	320	280	440	280	840	680	760	640	600	480	320	800	440	480	7360
Razem															13160
Datki na zbiory nauk. wynosiły	70	76	82	82	94	92	80	82	72	72	68	68	48	46	1032
Taksy wstępne wynosiły . . .	142·8	151·20	25·2	25·2	29·4	8·4	8·4	16·8	16·8	16·8	4·2	4·2	4·2	—	453·6
Taksy za duplikaty świadectw. .															68
Razem															1553·6
IX. Frekwencya na przedmioty nadobowiązkowe:															
J. ruski (wzgl. obowiązk.) . . .	13	3	5	9	12	4	12	1	4	2	3	1	—	—	69
Stenografia	—	—	—	—	8	7	2	14	3	3	2	1	—	—	40
Śpiew	2	16	7	14	13	5	5	7	—	—	1	6	1	5	82
IX. Stypendya:															
Liczba ogólna stypendyów . .	—	—	—	1	—	—	1	2	—	1	1	—	—	—	6
Ogólna kwota stypendyów . .	—	—	—	180	—	—	500	600	—	400	315	—	—	—	1995

Klasyfikacya uczniów

z końcem II. półrocza roku szkolnego 1911.

KLASA Ia.

Klasyfikowano 31 uczniów.

Chlubnie uzdolnieni:

1. Kuniński Jerzy
2. Nawrocki Mieczysław
3. Tinz Józef
4. Wicko Stefan

Uzdolnieni:

5. Bernfeld Wilhelm
6. Bibik Józef
7. Choma Aleksander
8. Dimel Władysław
9. Dyliński Józef
10. Fernhoff Manuel
11. Gablowski Andrzej
12. Greih Arpad
13. Hoffmann Robert
14. Janicki Włodzimierz
15. Karatnicki Dyonizy
16. Kosior Józef
17. Kruk Jan
18. Krukiewicz Julian
19. Markowski Józef
20. Oleszkiewicz Alojzy
21. Procyk Jerzy
22. Radoniewicz Bohdan
23. Stasyszyn Józef
24. Stern Wilhelm

Pozwolono 5 uczniom zdawać egzamin poprawczy po feryach szkolnych; 2 uczniów uznano za nieuzdolnionych.

KLASA Ib.

Klasyfikowano uczniów 29.

Chlubnie uzdolniony:

1. Dudek Aleksander

Uzdolnieni:

2. Bahr Wiktor
3. Czornooki Piotr
4. Farb Tobiasz
5. Matolicz Zygmunt
6. Mayer Maryan
7. Nazarewicz Roman
8. Neisser Maryan
9. Ostrowski Tadeusz
10. Rammer Rudolf
11. Rosenstock Abraham

12. Skopec Jerzy
13. Stenzel Maryan
14. Strahlberg Bronisław
15. Strusiewicz Roman
16. Tabak Selig
17. Wiszniewski Zygmunt
18. Zborowski Ryszard
19. Zuckerberg Hersch.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 6 uczniów. Uznano za nieuzdolnionych 4.

KLASA IIa.

Klasyfikowano 37 uczniów.

Uzdolnieni:

1. Borczowski Albert
2. Brichta Mieczysław
3. Cukrowicz Stanisław
4. Czaporowski Zdzisław
5. Dirınger Joachim
6. Dziurzyński Władysław
7. Gehring Rudolf
8. Helmich Jan
9. Hevelka August
10. Hilczer Edmund
11. Hrabowski Mieczysław
12. Jonas Leiser
13. Kolinek Stanisław
14. Krogulski Tadeusz
15. Krzywiński Kazimierz
16. Lewiński Kazimierz
17. Lindner Antoni
18. Mathes Jakób
19. Mühln Zbigniew
20. Neuman Zygmunt
21. Nowak Witold
22. Piątkowski Adam
23. Rothenstreich Nachman
24. Sławik Kazimierz
25. Sobel Szmerl
26. Szpilczyński Jan
27. Traub Józef
28. Turteltaub Zygmunt
29. Weintraub Wilhelm.

2 uczniów otrzymało poprawkę z jednego przedmiotu, za nieuzdolnionych uznano 6 uczniów.

KLASA IIb.

Klasyfikowano uczniów 36.

Uzdolnieni:

1. Chimiak Józef
2. Domski Jan
3. Fiedler Franciszek
4. Friedmann Edmund
5. Fuhrmann Izydor
6. Gajdosz Władysław
7. Hanusz Józef
8. Hübler Szepsl
9. Jakubowicz Wiktor
10. Kopczyński Stefan
11. Kopystyński Maryan
12. Łegin Michał
13. Mayer Nachman
14. Mazurkiewicz Alojzy
15. Pantke Kuno
16. Pszonka Władysław
17. Rubczak Roman

18. Selzer Markus.
19. Skalski Bazyli
20. Smułka Kornel
21. Szawłowski Kazimierz
22. Tillinger Józef
23. Tietze Erwin
24. Truch Juliusz
25. Vogel Jonas
26. Walkowski Tadeusz
27. Wiśniowski Zygmunt.

Pozwolono 7 uczniom zdawać egzamin poprawczy z jednego przedmiotu. Uznano za nieuzdolnionych 2 uczniów.

KLASA IIIa.

Klasyfikowano uczniów 41.

Chlubnie uzdolnieni:

1. Pyrzanowski Adam
2. Sokołowski Adolf
3. Tindel Natan

Uzdolnieni:

4. Bandler Bernard
5. Bihun Włodzimierz
6. Bodnaruk Włodzimierz
7. Chamajdis Berl
8. Drobisch Karol
9. Fischler Michał
10. Gnat Władysław
11. Hönig Naftali
12. Jakimowicz Aleksander
13. Kułucki Kazimierz
14. Kaufer Maryan
15. Klein Abraham
16. Leszczyński Stanisław
17. Litwinko Alfred
18. Manik Maryan
19. Mazurkiewicz Józef
20. Mühlstein Albert
21. Procyk Włodzimierz
22. Schatzberger Filip
23. Silberherz Chaim
24. Vogel Maks
25. Werth Wilhelm
26. Wiszniewski Józef
27. Zahler Natan
28. Żółkiewicz Kazimierz.

Przeznaczono do egzaminu poprawczego z jednego przedmiotu uczniów 9, uznano za nieuzdolnionych 4.

KLASA IIIb.

Klasyfikowano uczniów 43.

Chlubnie uzdolniony:

1. Steif Ozyasz

Uzdolnieni:

2. Abram Fryderyk
3. Czabański Emil
4. Czechowicz Tadeusz
5. Dziubiński Kazimierz
6. Eckhardt Rudolf
7. Fuhrmann Max
8. Gumol Henryk
9. Jędrzejowski Feliks
10. Jedynakiewicz Witold
11. Jędryk Jan

12. Klein Wilhelm
13. Kokoszka Stefan
14. Kriegel Natan
15. Krzemieniecki Jan
16. Kundyk Wiktor
17. Kurzmann Jakób
18. Mokrzycki Wacław
19. Ombach Józef
20. Ostropolski Stanisław
21. Rawski Erazm
22. Schloss Emil
23. Schmerzler Efroim
24. Siwiński Kazimierz
25. Stasyszyn Wilhelm
26. Strassmann Chaim
27. Teichmann Bazyli
28. Wędrzyński Stanisław
29. Wiśniowski Henryk
30. Wolfram Józef

Do egzaminu poprawczego po wakacyach przeznaczono uczniów 7. Za nieuzdolnionych uznano 6.

KLASA IVa.

Klasyfikowano uczniów 35.

Chlubnie uzdolnieni:

1. Begejowicz Justyn
2. Lermer August

Uzdolnieni:

3. Bernfeld Jakób
4. Biłous Orest
5. Dettloff Godzisław Wacław
6. Dressler Franciszek
7. Eigenfeld Izydor
8. Horn Artur
9. Hrankowski Klaudyusz
10. Iwanowicz Aleksander
11. Jabłoński Stanisław
12. Jełowicki Tadeusz
13. Kolnik Leon
14. Łopatyński Eugeniusz
15. Mokrzycki Władysław
16. Nadachowski Franciszek
17. Nowakowski Stanisław
18. Pietrański Aleksander
19. Ryniewicz Tadeusz
20. Woźniak Antoni

Do egzaminu poprawczego z jednego przedmiotu przeznaczono 4, za nieuzdolnionych uznano 11.

KLASA IVb.

Klasyfikowano uczniów 32.

Chlubnie uzdolniony:

1. Hilczer Juliusz Jan

Uzdolnieni:

2. Abzug Emanuel
3. Dziubiński Zygmunt
4. Giliciński Konrad
5. Gurawski Rudolf
6. Hanka Wacław
7. Kreindler Mordko
8. Krzywonos Julian
9. Kurcz Stanisław

10. Last Henryk
11. Mazarski Ferdynand
12. Rudolf Salomon
13. Urmann Artur

Do egzaminu poprawczego z jednego przedmiotu przeznaczono 6, za nieuzdolnionych uznano 13.

KLASA Va.

Klasyfikowano uczniów 25.

Chlubnie uzdolniony:

1. Kalous Mieczysław

Uzdolnieni:

2. Antoniewicz Andrzej
3. Bandler Maurycy
4. Barenblüth Salomon
5. Bużański Izajasz
6. Deutsch Chaskel
7. Kleinfeld Izydor
8. Kopkowicz Franciszek
9. Kunasiewicz Tadeusz
10. Robinsohn Karol
11. Wittels Aron.

Do egzaminu poprawczego z jednego przedmiotu przeznaczono 8, za nieuzdolnionych uznano 6.

KLASA Vb.

Klasyfikowano uczniów 26.

Uzdolnieni:

1. Bier Seinwil
2. Blaukopf Wilhelm
3. Czyżowski Kazimierz
4. Dressler Jan
5. Dyńko Adam Tadeusz
6. Ferber Hermann
7. Hanus Stanisław
8. Kanarienvogel Izydor
9. Klarberg Szymon
10. Knopf Maurycy
11. Merunowicz Jerzy Wiktor
12. Schrager Józef
13. Stein Józef
14. Świdziński Józef
15. Truch Tomasz Kazimierz
16. Tuzinkiewicz Józef
17. Zinn Hersch

Do egzaminu poprawczego z jednego przedmiotu przeznaczono 8, za nieuzdolnionych uznano 2.

KLASA VIa.

Klasyfikowano uczniów 28.

Uzdolnieni:

1. Barenblüth Ozyasz
2. Bernhardt Stanisław
3. Dickmann Jonasz
4. Dyrów Stefan
5. Eigenfeld Leon Bernard
6. Elster Jakób
7. Fedaków Józef
8. Fink Wolf
9. Green Stanisław Tadeusz
10. Heller Władysław Eugen.
11. Kalman Dawid

12. Kéler Roman de
13. Nowosielski Feliks
14. Patlewicz Maryan
15. Rek Adolf
16. Rotter Alojzy
17. Siczyński Omelan Jarosław
18. Sieminowicz Bohdan
19. Sochocki Jerzy
20. Szpunt Eliasz
21. Szafrański Franciszek
22. Walter Leon
23. Wolf Filip
24. Zybura Kazimierz

Do egzaminu poprawczego z jednego przedmiotu przeznaczono 3, za nieuzdolnionego uznano 1.

KLASA VIb.

Klasyfikowano uczniów 30.

Uzdolnieni:

1. Bandler Salomon
2. Fischgrind Alter
3. Gold Israel
4. Gugig Salomon
5. Hampel Wiktor
6. Heimer Leon
7. Jäger Jakób
8. Łebedyński Franciszek
9. Nowosielski Stanisław
10. Rosenblatt Leon
11. Rosenkranz Nuchim
12. Rudolf Zygfryd
13. Schrager Chaim
14. Sokal Michał
15. Weidler Józef

Do egzaminu poprawczego z jednego przedmiotu przeznaczono 14, za nieuzdolnionego uznano 1.

KLASA VIIa.

Z wynikiem dobrym ukończyli klasę:

1. Filipończuk Józef
2. Janicki Jan
3. Kierniakiewicz Izydor
4. Lebensart Józef
5. Lityński Maryan
6. Łopatyński Konstanty
7. Szmuk Dawid
8. Weinstein Nuchim
9. Zaborski Adam
10. Zahler Józef
11. Żerebecki Franciszek

Do egzaminu poprawczego przeznaczono siedmiu uczniów, trzech uczniów ukończyło klasę z wynikiem niedostatecznym

KLASA VIIb.

Z wynikiem chlubnym ukończyli klasę:

1. Mokrzycki Andrzej
2. Trębecki Michał

Z wynikiem dobrym ukończyli klasę:

3. Czerny Edward
4. Fabiański Stanisław
5. Frühauf Władysław
6. Füllenbaum Ignacy
7. Grudziński Kazimierz
8. Hendler Maks
9. Kniżatko Stanisław
10. Margulies Alfred
11. Muszyński Józef
12. Pietrański Stanisław
13. Plezner Wiktor
14. Rotter Tadeusz
15. Schratter Meschulim

Do egzaminu poprawczego przeznaczono sześciu uczniów, dwóch uczniów ukończyło klasę z wynikiem niedostatecznym.

Wynik egzaminu dojrzałości

a) w terminie jesiennym roku szkolnego 1910/11.

Do ustnego egzaminu dojrzałości zgłosiło się uczniów publicznych 6

Z tych uznano za dojrzałych większością głosów . . . 3
Za niedojrzałych, reprobowanych na pół roku 2
Odstąpił od egzaminu 1

Razem . . . 6

b) w terminie zimowym roku szkolnego 1910/11.

Do ustnego egzaminu dojrzałości zgłosiło się uczniów publicznych 4

Z tych uznano za dojrzałych większością głosów . . . 2
Za niedojrzałych, reprobowanych na pół roku 2

Razem . . . 4

W obu tych terminach:

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

1. Almer Mendel
2. Bernardt Mikołaj
3. Kochański Szczepan
4. Dobrzański Władysław
5. Zuckerberg Aleksander

c) w terminie letnim od 21. do 24. czerwca 1911.

Do egzaminu dojrzałości ustnego dopuszczono uczniów publicznych z obu oddziałów klasy siódmej 28

Z tych uznano za dojrzałych z odznaczeniem . . . 7
„ „ „ jednomyślnie 5
„ „ „ większością głosów . . 10
Odstąpiło przed egzaminem 2
„ wśród egzaminu 1
reprobowano na pół roku 3

Razem . . . 28

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

a) z odznaczeniem:

1. Lebensart Józef
2. Mokrzycki Andrzej
3. Schmuk Dawid
4. Schratter Meszulem
5. Trębecki Michał
6. Zaborski Franciszek
7. Żerebecki Franciszek

b) z wynikiem „dojrzały jednomyślnie":

1. Filipończuk Józef
2. Fabiański Stanisław
3. Kierniakiewicz Izydor
4. Plezner Wiktor
5. Weinstein Nuchim

c) z wynikiem „dojrzały większością głosów":

1. Czerny Edward
2. Frühauf Władysław
3. Füllenbaum Ignacy
4. Grudziński Kazimierz
5. Hendler Maks
6. Janicki Jan
7. Lityński Maryan
8. Łopatyński Konstanty
9. Pietrański Stanisław
10. Vogel Adolf.

Ogłoszenie dotyczące przyszłego roku szkolnego.

Wpisy uczniów publicznych jakoteż prywatnych na rok 1911/12 odbywać się będą w dniach 30. i 31. sierpnia od godziny 8—12. przed południem i od 4—6 popołudniu. Późniejsze zgłoszenia będą uwzględnione tylko w wyjątkowych wypadkach. Uczniowie tutejszego zakładu mają przy wpisie przedłożyć świadectwo szkolne z ostatniego półrocza i dokładnie wypełnioną kartę wpisową. Uczniowie, przybywający z innych zakładów do kl. II.—VII. mają przy wpisie przedłożyć: 1) metrykę urodzenia, 2) świadectwo szkolne z ostatniego półrocza, opatrzone potwierdzeniem Dyrekcyi, że mogą być przyjęci w innym zakładzie bez przeszkody, a gdy uczeń uwolniony od opłaty szkolnej, potwierdzeniem przez Dyrekcyę szkoły z dodaniem daty i liczby uwolnienia i dokładnie wypełnioną kartę wpisową.

Przy wpisie do klasy pierwszej należy przedłożyć:

1) metrykę urodzenia, 2) świadectwo szkolne za ostatnie półrocze, jeżeli uczeń pobierał naukę w szkołach publicznych, 3) świadectwo szczepienia ospy.

§. 13. ustawy z dnia 24. sierpnia 1899. Dz. u. kr. Nr. 108 określającej granice wieku uczniów publicznych szkół realnych należy rozumieć w ten sposób, że do klasy I. przyjęci być mogą uczniowie, którzy urodzili się w roku słonecznym oznaczonym liczbą mniejszą o 10 względnie o 14 od liczby oznaczającej bieżący rok kalendarzowy. Te granice wieku dla każdej klasy następnej posuwają się o rok dalej.

Każdy uczeń ma złożyć przy wpisie 2 K. na środki naukowe i 1 K. na gry i zabawy. Uczniowie nowo-wstępujący do zakładu płacą nadto taksę wstępną 4 K. 20 h.

Pożądanem jest także, by majętniejsi uczniowie złożyli choćby najskromniejszy datek na fundusz dla biednych uczniów.

Uczniowie, obowiązani do składania opłaty szkolnej, mają ją złożyć w pierwszych sześciu tygodniach każdego półrocza, t. j. przed 15. października i 15. marca. Prośby o uwolnienie od opłaty szkolnej, zaopatrzone w świadectwo ubóstwa, nie dawniej jak przed rokiem wydane, należy bez stempla wnosić za pośrednictwem Dyrekcyi do Wysokiej c. k. Rady szkolnej krajowej najpóźniej do 25. września w pierwszem półroczu, a 25-go lutego w drugiem. O uwolnienie od opłaty szkolnej mogą wnosić

prośby tylko ci uczniowie ubodzy, którzy za ostatnie półrocze otrzymali świadectwo z wynikiem uprawniającym ich do przejścia do klasy następnej a z zachowania się cenzurę co najmniej „dobre“.

Uczniowie klasy I. mają złożyć opłatę szkolną za pierwsze półrocze do 1. listopada; ci jednak ubodzy uczniowie, którzy już w pierwszych dwóch miesiącach czynią co najmniej „dobre“ postępy we wszystkich przedmiotach, okazują co najmniej „dobre“ zachowanie się, mogą uzyskać odroczenie tego terminu aż do końca półrocza, a w razie pomyślnej klasyfikacyi za I. półrocze będą uwolnieni od opłaty szkolnej. Uczniowie, chcący z tego dobrodziejstwa korzystać, mają w ciągu 6 tygodni po rozpoczęciu roku szkolnego wnieść za pośrednictwem Dyrekcyi nieostemplowane prośby do Wysokiej c. k. Rady szkolnej krajowej, załączając do nich dokładne świadectwo ubóstwa, potwierdzone przez dwie władze.

Rodzice lub opiekunowie uczniów zamiejscowych mogą swoich wychowanków umieszczać u osób, które się wykażą *„Regulaminem dla osób, utrzymujących w swych domach uczniów szkół średnich“* wydanym przez c. k. Radę szkolną krajową l. 11781/98 i opatrzonym pieczęcią Dyrekcyi szkoły realnej.

Utrzymujący uczniów na stancyi winni się w Dyrekcyi zgłosić celem uzyskania pozwolenia na utrzymanie uczniów na stancyi w nadchodzącym roku szkolnym.

Uczniowie, którzy mieszkać będą u osób, niemających na to pozwolenia, muszą zmienić mieszkanie, lub opuścić szkołę.

Egzamina wstępne do klasy I. odbywać się będą w dwóch terminach, przed feryami 30. czerwca i 1. lipca, po feryach 1. i 2. września. Powtórzenie egzaminu wstępnego przed upływem roku nie jest dozwolone ani w tym samym zakładzie, ani w innej średniej szkole.

Egzamina poprawcze odbędą się w dniach od 29. do 31. sierpnia, 1. i 2. września.

Egzamina wstępne do klasy II.—VII. składać można od 4—10. września w I. półroczu, a od 1—10. lutego w II. półroczu w dniach, które Dyrektor zgłaszającym się wyznaczy.

Rok szkolny 1911/12 rozpocznie się uroczystem nabożeństwem dnia 3. września, a dnia 4. września rozpoczną się lekcye szkolne.

Franciszek Nowosielski
dyrektor.

ST. CHOWANIEC
DRUKARNIA i LITOGRAFIA
w STANISŁAWOWIE